Das magnetische Wechselfeld im Luftspalt von massivem Eisen

Von der Technischen Hochschule zu Breslau

zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs

genehmigte

Dissertation

Vorgelegt von

Dipl.-Ing. **Fritz Haberland**
aus Dortmund

Referent: Professor Dr. G. Hilpert
Korreferent: Dr. M. Büge
Priv. Doz.

Tag der mündlichen Prüfung: 29. Juli 1933

Sonderdruck aus Archiv für Elektrotechnik 1934, Band XXVIII, Heft 4
(Im Buchhandel durch Julius Springer in Berlin W 9)

1933

Theorie des magnetischen Wechselfeldes im Luftspalt von massivem Eisen.

Inhalt: Das Feld im Eisen und im Luftspalt eines mit Wechselstrom magnetisierten massiven Eisenringes wird rechnerisch untersucht. Es werden folgende Fälle behandelt: Ebenes Feld, radialsymmetrisches Feld, Polquerschnitt rechteckig, Permeabilität des Eisens konstant, Permeabilität komplex (zur Berücksichtigung der Hysteresis), Induktion im Eisen dem Betrage nach konstant (zur Abschätzung des Einflusses der Sättigung). Über die experimentelle Prüfung wird ein zweiter Aufsatz in dieser Zeitschrift berichten, der auch eine Zusammenfassung der Ergebnisse bringt.

A. Veranlassung und Ziel der Arbeit.

Das Problem der Magnetisierung von massivem Eisen mit Wechselstrom ist bereits weitgehend durchforscht. In zahlreichen Arbeiten (Lit. 1—17) ist der Verlauf des Wechselfeldes im massiven Eisen theoretisch und experimentell, für konstante Permeabilität und unter Berücksichtigung der Sättigungs- und Hysteresiserscheinungen untersucht worden. Diese Arbeiten setzen aber einen geschlossenen Eisenring voraus, während in praktischen Fällen in der Regel der Eisenring durch einen Luftspalt unterbrochen ist. Dem Verfasser sind nur zwei Arbeiten bekannt, die für einfache Spezialfälle den Einfluß des Luftspalts berücksichtigen (Lit. 18 u. 19). Die vorliegende Arbeit hat das Ziel, den Verlauf des Feldes im Luftspalt von massivem Eisen allgemein zu klären. Die Aufgabe wird in diesem Aufsatz unter vereinfachenden Annahmen theoretisch behandelt. In einer zweiten Mitteilung wird an Hand von Versuchsergebnissen gezeigt werden, mit welcher Genauigkeit die Theorie die wirklichen Verhältnisse beschreibt.

Die vorliegende Untersuchung findet unmittelbare Anwendung auf alle Probleme, bei denen massives Eisen im Wege von magnetischen Wechselfeldern liegt. (Elektrische Maschinen, Hochfrequenzöfen.) Sie bildet ferner, wenn die Permeabilität des Eisens konstant gesetzt werden darf, eine geeignete Grundlage für die rechnerische Behandlung von Schaltvorgängen in magnetischen Kreisen mit massivem Eisen und Luftspalt (z. B. Gleichstromrelais, Gleichstrom- und Synchronmaschinen). Denn nach dem Verfahren von Heaviside kann man Schaltstöße auf periodische Vorgänge zurückführen, wenn die Bestimmungsgrößen linearen Differentialgleichungen gehorchen.

B. Theoretische Untersuchung.

I. Der Feldverlauf im Eisen.

Für die Beschreibung des Feldverlaufs im Eisen wird der folgenden theoretischen Untersuchung im allgemeinen die klassische Theorie von Thomson zugrunde gelegt, die konstante Permeabilität im Eisen voraussetzt. Hierdurch wird ein Fehler gemacht, der besonders bei gesättigtem Eisen und bei Eisen mit starken Hysteresisverlusten bemerkbar sein wird. Um den Einfluß der Sättigung übersehen zu können, wird in einem einfachen Beispiel der Idealfall untersucht, daß die maximale Induktion im Eisen konstant, also unabhängig von der Feldstärke ist, eine Annahme, die nach Rosenberg (Lit. 8) für die Wirbelstromverluste gute Übereinstimmung mit der Wirklichkeit liefert. Der Einfluß der Hysteresis läßt sich durch Annahme einer komplexen Permeabilität abschätzen.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Alle elektrischen und magnetischen Größen werden in den Ableitungen dieser Arbeit in absoluten elektromagnetischen Einheiten (EME) gemessen. Sind Spannungen, Ströme und Widerstände in Volt, Ampere und Ohm gegeben, so sind ihre Maßzahlen vor dem Einsetzen in die Gleichungen mit 10^8, 10^{-1} bzw. 10^9 zu multiplizieren. Sämtliche Vektoren sind Effektivwerte.

Es bedeuten:

μ Permeabilität des Eisens.
ω Kreisfrequenz der Wechselspannung (1/s).
ϱ Spezifischer Widerstand des Eisens (EME).
$\mathfrak{H}_1$ Feldstärke im Eisen (Γ).
$\mathfrak{H}_{1,0}$ Feldstärke im Eisen in der Mittelebene des Bleches oder in der Stabachse (Γ).
$\mathfrak{H}_r$ Randfeldstärke im Eisen (Γ).
$\mathfrak{B}_r$ Randinduktion im Eisen (Γ).
Φ Fluß im Eisen pro Zentimeter Umfang, spezifischer Fluß (Mx/cm).
J_0 Besselsche Funktion erster Art nullter Ordnung.

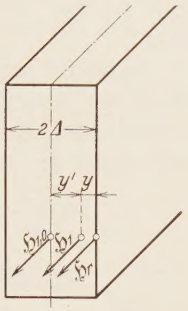


Bild 1. Feldstärke in einem mit Wechselstrom magnetisierten Eisenblech. Zu Gleichung (1).

Magnetisiert man ein gleichmäßig dicht bewickeltes Eisenblech, dessen Dicke klein gegen die anderen Abmessungen ist, in der Längsrichtung mit sinusförmiger Wechselspannung, so verteilt sich nach der klassischen Theorie das Feld über die Blechstärke nach dem Gesetz[1] (Bild 1):

$$\mathfrak{H}_1 = \text{const.}\left(e^{\sqrt{j}\,y'/k} + e^{-\sqrt{j}\,y'/k}\right) = \mathfrak{H}_{1,0}\,\mathfrak{Cof}\left(\sqrt{j}\,y'/k\right) = \mathfrak{H}_{1,0}\,\mathfrak{Cof}\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\,y'/k\right). \quad (1)$$

Für einen runden Stab findet man (Lit. 11):

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_{1,0}\,J_0\left(\sqrt{j}\,y'/k\right). \quad (1a)$$

In diesen Gleichungen ist gesetzt:

$$k^2 = \varrho/4\,\pi\,\omega\,\mu. \quad (1b)$$

Ist das Eisen genügend stark, so gehen beide Gleichungen in der Nähe des Randes und in genügender Entfernung von vorhandenen Ecken über in:

$$\mathfrak{H}_1 \approx \mathfrak{H}_r\,e^{-\sqrt{j}\,y/k} = \mathfrak{H}_r\,e^{-y/k\sqrt{2}}\,e^{-j\,y/k\sqrt{2}}. \quad (1c)$$

Man übersieht, daß in diesem Falle der Feldverlauf unabhängig von der Gestalt des Eisenquerschnittes wird. Der Fluß hängt nur von der Größe des Umfangs ab und wird für 1 cm desselben:

$$\Phi = \mu \int_0^\infty \mathfrak{H}_1\,dy = \mu\,\mathfrak{H}_r\,k\,e^{-j\pi/4} = \mathfrak{B}_r\,k\,e^{-j\pi/4}. \quad (2)$$

Nach dem Vorgang von Rosenberg (Lit. 8) und G. Haberland (Lit. 20) werde k die Eindringtiefe genannt. Sie gibt nach Gleichung (2) die Dicke der Schicht an, die bei konstanter phasengleicher Induktion $\mathfrak{B}_r$ in der Schicht den wirklichen Fluß führen würde.

Setzt man für Eisen $\varrho = 10^4$ (EME), $\mu = 1000$, so ist für

	$16^2/_3$	50	500	Hz
$k =$	0,875	0,505	0,160	mm
4,44 $k =$	3,88	2,24	0,712	mm

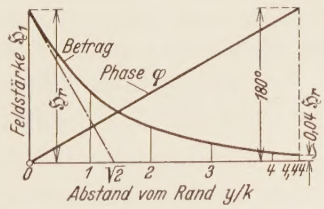


Bild 2. Theoretischer Verlauf der Feldstärke $|\mathfrak{H}|$ und ihrer Phasenverschiebung φ an der Oberfläche von sehr dickem Eisen nach Thomson.

Nach Gleichung (1c) und Bild 2 hat sich in der 4,44fachen Eindringtiefe die Phase der Feldstärke um 180° geändert, und ihre Amplitude ist auf 4% abgesunken,

[1] Gleichung (1) folgt nach leichten Umformungen aus Fraenckel (Lit. 22), S. 137, Gleichung (10).

also praktisch verschwunden. Für eine Eisenstärke von 1 cm und mehr geben daher Gleichung (1c) und (2) eine gute Näherung. Sie wurden der folgenden Rechnung zugrunde gelegt. Die Feldstärke erleidet nach Gleichung (1c) gegenüber der Randfeldstärke eine nacheilende Phasenverschiebung, die proportional dem Abstand vom Rande wächst, während ihre Amplitude exponentiell mit der Phasenverschiebung abnimmt.

In Bild 3 ist ein Eisenkreis mit Luftspalt dargestellt, Bild 4 gibt den ungefähren Verlauf der Induktionslinien im Bereich des Luftspalts wieder. In das Eisen dringt das Feld, auch an den Polflächen, praktisch nur bis zur Eindringtiefe k ein. Im Luftspalt nimmt die Induktion ebenfalls nach dem Innern hin ab. Denn der Kraftfluß

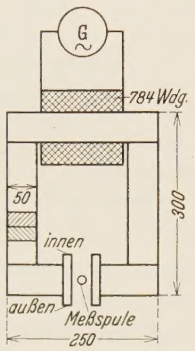


Bild 3. Aufbau des untersuchten magnetischen Kreises.

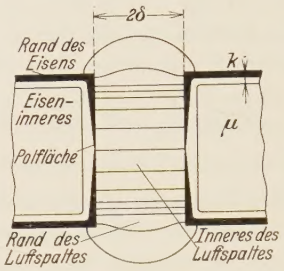


Bild 4. Verlauf der Induktionslinien im Luftspalt (schematisch). Erklärung der Bezeichnungen.

fließt dem Innern des Luftspalts durch die Oberflächenhaut der Pole zu und verbraucht hierbei magnetische Spannung. Die für die Luftlinien verfügbare magnetische Spannung wird also nach dem Luftspaltinnern hin geringer.

II. Der Feldverlauf in einem Eisenring mit einem Luftspalt konstanter Stärke zwischen ebenen Polflächen.

a) Die Pole sind unendlich groß und die Permeabilität ist konstant.

1. Ebenes Feld.

Zwei je einen Halbraum erfüllende Pole mögen sich in dem Abstand 2δ gegenüberstehen. In Bild 5 ist aus den Polen je ein Quader herausgeschnitten. Der Koordinatenanfangspunkt ist in den Mittelpunkt des Luftspalts verlegt. Die magnetisierende Kraft ist in Richtung der x-Achse zu denken. Die Wirbelströme sollen parallel zur z-Achse verlaufen. Der magnetische Fluß möge sich mit der Zeit sinusförmig ändern. Der Index 1 bezeichne die Größen für das Eisen, der Index 2 die für die Luft. Führt man außer den früheren Bezeichnungen noch ein:

$\mathfrak{H}$ Magnetische Feldstärke (I),
$\mathfrak{E}$ Elektrische Feldstärke (EME $= 10^8$ V/cm),
i Stromdichte (EME $= 10^{-1}$ A/cm^2),

so liest man an dem Raumelement mit den Kantenlängen dx, dy und 1 cm leicht folgende Beziehungen ab:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial y} = -j\omega\mu\mathfrak{H}_{x,1}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial y} = -j\omega\cdot\mathfrak{H}_{x,2}, \tag{3a u. b}$$

$$-\frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial x} = -j\omega\mu\mathfrak{H}_{y,1}, \qquad -\frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial x} = -j\omega\cdot\mathfrak{H}_{y,2}, \tag{4a u. b}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_{y,1}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_{x,1}}{\partial y} = 4\pi i = 4\pi\frac{\mathfrak{E}_1}{\varrho}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{H}_{y,2}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_{x,2}}{\partial y} = 0. \tag{5a u. b}$$

Führt man wieder die durch Gleichung (1b) definierte Eindringtiefe für das Eisen k ein, so findet man durch Vereinigung der Gleichungen (3) bis (5)

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_1}{\partial y^2} = \frac{j}{k^2}\mathfrak{E}_1, \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_2}{\partial y^2} = 0. \tag{6a u. b}$$

$\mathfrak{E}$ ist aus Symmetrierücksichten eine gerade Funktion von x und eine ungerade Funktion von y. Daher sind passende Lösungen dieser Gleichungen für den linken Pol und den Luftraum:

$$\mathfrak{E}_1 = A_1 \operatorname{Sin} \alpha\, y\, e^{-\beta x}, \quad \mathfrak{E}_2 = A_2 \operatorname{Sin} \alpha\, y \cdot \cos \alpha\, x, \tag{7a u. b}$$

wo α, β, A_1 und A_2 noch zu bestimmende Konstanten sind.

Nach Gleichung (6a) besteht die Beziehung:

$$\alpha^2 + \beta^2 = j/k^2, \tag{8}$$

und nach Gleichung (3) und (4) folgt für die Feldstärken:

$$\mathfrak{H}_{x,1} = B_1 \alpha \operatorname{Cof} \alpha\, y \cdot e^{-\beta x}, \quad \mathfrak{H}_{y,1} = B_1 \beta \operatorname{Sin} \alpha\, y \cdot e^{-\beta x}, \tag{9a u. b}$$

$$\mathfrak{H}_{x,2} = \mathfrak{H}_0 \operatorname{Cof} \alpha\, y \cdot \cos \alpha\, x, \quad \mathfrak{H}_{y,2} = \mathfrak{H}_0 \operatorname{Sin} \alpha\, y \cdot \sin \alpha\, x, \tag{10a u. b}$$

wobei gesetzt ist:

$$\frac{j}{\omega \mu} A_1 = B_1 \quad \text{und} \quad \frac{j\alpha}{\omega} A_2 = \mathfrak{H}_0.$$

$\mathfrak{H}_0$ ist die Feldstärke im Koordinatenanfangspunkt.

Die Gleichungen (9) und (10) stellen die richtige Lösung unseres Problems dar, wenn sie sämtliche Randbedingungen erfüllen. Diese sind:

$$\lim_{y=\infty} \frac{\mathfrak{H}_x}{\mathfrak{H}_y} = \infty, \tag{11}$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{\mathfrak{H}_{x,1}}{\mathfrak{H}_{y,1}} = 0, \tag{12}$$

für $x = \delta$:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H}_{x,2} &= \mu\, \mathfrak{H}_{x,1}, \\ \mathfrak{H}_{y,2} &= \mathfrak{H}_{y,1}. \end{aligned}\right\} \tag{13a u. b}$$

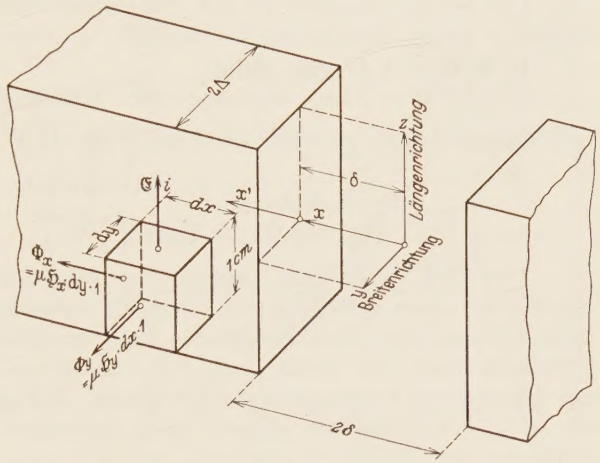


Bild 5. Zur rechnerischen Bestimmung des Feldverlaufs im Luftspalt von massiven, allseits unendlichen Polen. (Ebenes Problem.)

Gleichung (11) ist durch Gleichungen (9) und (10) erfüllt. Gleichung (12) ist die mathematische Formulierung für die Erkenntnis des vorigen Abschnitts, daß das Eisen in weitem Abstand vom Luftspalt feldfrei ist. Nach Gleichung (9) und (12) muß also β so bestimmt werden, daß sein Realanteil positiv ist:

$$\Re e\,(\beta) \geqq 0. \tag{12a}$$

Diese Bedingung wird später untersucht. Die Gleichungen (13a u. b) sind die bekannten Stetigkeitsbedingungen für den Übergang von Induktionslinien aus dem Eisen in die Luft und dienen zur Bestimmung der Konstanten. Man findet mit ihrer Hilfe aus Gleichung (9) u. (10):

$$\mathfrak{H}_0 \cos \alpha\, \delta = B_1 \mu\, \alpha\, e^{-\beta \delta}, \quad \mathfrak{H}_0 \sin \alpha\, \delta = B_1 \beta\, e^{-\beta \delta} \tag{14a u. b}$$

und durch Vereinigung:

$$B_1 = \mathfrak{H}_0 \frac{\sin \alpha\, \delta}{\beta} e^{\beta \delta} \quad \text{und} \quad \alpha \operatorname{tg} \alpha\, \delta = \beta : \mu. \tag{15 u. 16}$$

Nach Gleichung (10) stellt $\operatorname{tg} \alpha\, \delta$ das Verhältnis $\mathfrak{H}_{y,2} : \mathfrak{H}_{x,2}$ für große Werte y und für $x = \delta$ dar, wird also bei nicht zu großen Luftspalten klein, so daß man fast stets mit genügender Genauigkeit den Tangens durch sein Argument ersetzen kann. Man erhält daher durch Vereinigung von Gleichung (8) und (16), wenn man setzt:

$$K = \sqrt{\mu k \delta} = \sqrt[4]{\mu \varrho \delta^2 / 4 \pi \omega} \text{ und } K' = \frac{1}{\alpha}, \tag{17}$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{K'^2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + j 4 \frac{\mu^2 \delta^2}{k^2}}}{2 \delta^2 \mu^2} = \frac{1}{K^2} \frac{-1 + \sqrt{1 + j 4 (K/k)^4}}{2 (K/k)^2} = \frac{1}{k^2} \frac{-1 + \sqrt{1 + j 4 (K/k)^4}}{2 (K/k)^4}. \tag{17a}$$

Es gilt das positive Vorzeichen vor der Wurzel, da nur dann der Realanteil von β positiv sein kann, wie es Gleichung (12a) verlangt. Es läßt sich zeigen, daß Gleichung (12a) dann stets erfüllt ist. Die Gleichungen (9) und (10) geben also in jedem Falle die richtige Lösung und es wird mit Hilfe von Gleichung (15), (16) und (17a):

$$\left.\begin{aligned} \mu \mathfrak{H}_{x,1} &= \mathfrak{H}_0 \mathfrak{Cof} \frac{y}{K'} e^{\left(\frac{K}{K'}\right)^2 \frac{x'}{k}}, & \mathfrak{H}_{y,1} &= \mathfrak{H}_0 \frac{\delta}{K'} \mathfrak{Sin} \frac{y}{K'} e^{-\left(\frac{K}{K'}\right)^2 \frac{x'}{k}} \\ \mathfrak{H}_{x,2} &= \mathfrak{H}_0 \mathfrak{Cof} \frac{y}{K'} \cos \frac{x}{K'}, & \mathfrak{H}_{y,2} &= \mathfrak{H}_0 \mathfrak{Sin} \frac{y}{K'} \sin \frac{x}{K'}, \end{aligned}\right| \tag{18}$$

wo gesetzt ist:

$$x - \delta = x'. \tag{19}$$

Um bessere Einsicht in den Sinn dieser Gleichungen zu bekommen, werden im folgenden einige Sonderfälle betrachtet.

1. $K/k \ll 1$ (δ sehr klein).

Wird K/k so klein, daß man alle Glieder von höherer als erster Ordnung vernachlässigen kann, so wird aus Gleichung (17a) und (18) für Werte von $x' \ll \frac{k^2}{\mu \delta}$:

$$K' = k/\sqrt{j}.$$

$$\mathfrak{H}_{x,2} = \mu \mathfrak{H}_{x,1} = \mathfrak{H}_0 \mathfrak{Cof}\left(\frac{y}{k}\sqrt{j}\right), \quad \mathfrak{H}_{y,1} = \mathfrak{H}_{y,2} \ll \mathfrak{H}_x.$$

Das Feld verläuft im Luftspalt wie im Eisen, und zwar so, wie es die klassische Theorie für einen geschlossenen Eisenring vorschreibt [vgl. Gleichung (1)]. Der Luftspalt ist also ohne Einfluß auf das Feld im Eisen. Folgende Zahlentafel gibt einen Überblick über die Größe von K/k, wobei $\omega = 300/\text{s}$, $\varrho = 10^4$ EME angenommen ist. Für höhere Frequenzen wird k kleiner, K/k größer. Wenn $4 (K/k)^4$ klein gegen 1 ist, ist K/k als klein im obigen Sinne anzusehen [s. Gleichung (17a)].

Zahlentafel 1.

	$\mu = 200$ $k = 1{,}157$ mm				$\mu = 3200$ $k = 0{,}289$ mm	
$2\delta =$	$^1/_{1000}$ mm	$^1/_{100}$ mm	$^1/_{10}$ mm	1 mm	$^1/_{1000}$ mm	$^1/_{100}$ mm
$K =$	0,339	1,072	3,39	10,72	0,678	2,14
$K/k =$	0,295	0,932	2,94	9,32	2,36	7,46
$4 (K/k)^4 =$	0,03	3,0	300	$3 \cdot 10^4$	123	12 300

Die Luftspaltweite muß bei technischen Frequenzen also weniger als 0,001 mm betragen, damit das Feld im Luftspalt ein Abbild von dem im Eisen ist.

2. $K/k \gg 1$ ($\delta \gtrsim 0{,}1$ mm).

Für sehr große Werte von K/k [$4 (K/k)^4 \gtrsim 1000$] wird nach Gleichung (17a):

$$K' = K/\sqrt[4]{j},$$

$$\left.\begin{aligned} \mu \mathfrak{H}_{x,1} &= \mathfrak{H}_0 \mathfrak{Cof}\left(\frac{y}{K}\sqrt[4]{j}\right) e^{-\frac{x'}{k}\sqrt{j}}, & \mathfrak{H}_{y,1} &= \mathfrak{H}_0 \frac{\delta}{K} \mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{K}\sqrt{j}\right) e^{-\frac{x'}{k}\sqrt{j} + j\frac{\pi}{8}} \\ \mathfrak{H}_{x,2} &= \mathfrak{H}_0 \mathfrak{Cof}\left(\frac{y}{K}\sqrt{j}\right) \cos\left(\frac{x}{K}\sqrt[4]{j}\right), & \mathfrak{H}_{y,2} &= \mathfrak{H}_0 \mathfrak{Sin}\left(\frac{y}{K}\sqrt[4]{j}\right) \sin\left(\frac{x}{K}\sqrt[4]{j}\right) \end{aligned}\right| \tag{20}$$

Schon in geringer Entfernung von der Ebene $y = 0$ (Bild 5) verschwindet $\mathfrak{H}_{x,1}$ gegen $\mathfrak{H}_{y,1}$. Die Kraftlinien verlaufen also im Eisen praktisch parallel zu den Polflächen. Bei Luftspaltweiten unter etwa 3 cm ist ferner $\mathfrak{H}_{y,2}$ gegen $\mathfrak{H}_{x,2}$ zu vernachlässigen, die Kraftlinien verlaufen im Luftspalt im wesentlichen senkrecht zu den

Polflächen. Es ergibt sich also das in Bild 4 gezeigte Feldbild. Das Bild 6 stellt den Betrag und die Phase von $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_0$ in Abhängigkeit von y/K dar, wobei $\mathfrak{H}$ die Feldstärke $\mathfrak{H}_{x,2}$ für $x = 0$ bedeutet. Ein Vergleich der Gleichung (20) mit Gleichung (1), S. 235, lehrt, daß das Feld im Luftspalt formal ähnlich verläuft wie in luftspaltfreiem Eisen, nur daß an Stelle der Eindringtiefe k für das Eisen der Parameter K tritt. K werde deshalb Eindringtiefe für den Luftspalt genannt.

Es wird angenähert für kleine Werte von y/K:

$$|\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_0| = 1 + 0{,}3535\ (y/K)^2, \quad \varphi = 0{,}3535\ (y/K)^2$$

und für große Werte von y/K:

$$|\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_0| = \mathfrak{Cof}\left(\frac{y}{K}\cos\frac{\pi}{8}\right) \approx \frac{1}{2}\, e^{\frac{y}{K}\cos\frac{\pi}{8}}, \qquad \varphi = \frac{y}{K}\sin\frac{\pi}{8}. \tag{21}$$

Die Amplitude und die Phase der Feldstärke ändern sich anfangs parabolisch mit dem Abstand von der Mittelebene. In großer Entfernung von dieser steigt die Amplitude exponentiell, die Phase geradlinig an.

Im Eisen bewirkt eine große Permeabilität eine große Änderung der Phase und Amplitude der Feldstärke von der Oberfläche des Eisens nach dem Innern zu [s. Gleichung (1b) und (1c)]. Im Luftspalt sind dagegen nach Gleichung (17) bei kleiner Permeabilität, also bei sehr kleiner und sehr hoher Induktion im Eisen, die größten Änderungen zu erwarten (s. Bild 6).

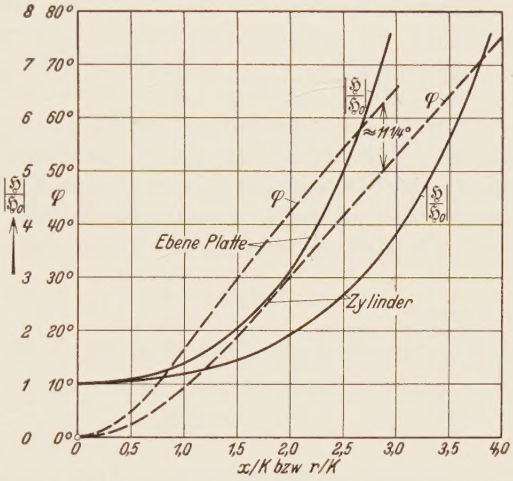


Bild 6. Theoretischer Verlauf von Amplitude und Phase der Feldstärke im Luftspalt von plattenförmigen und zylindrischen Polen. (Die Abszisse ist nicht x/K sondern y/K).

Die Gleichungen (20) und (21) gelten für ein unbegrenztes ebenes Feld. Sie beschreiben angenähert auch das Feld zwischen Polen von langgestrecktem, rechteckigem Querschnitt.

Für derartige Pole kann man aus Gleichung (20) den magnetischen Widerstand berechnen. Als spezifischen magnetischen Widerstand W bezeichne ich den Quotienten aus der Randfeldstärke $\mathfrak{H}_{r,2}$ und dem Fluß Φ_2 für 1 cm Länge der Polflächen (s. Bild 5). Es soll nur der einfache Fall behandelt werden, daß die Polflächen im Verhältnis zur Luftspaltweite so breit sind, daß das Feld im Innern des Luftspalts praktisch verschwindet. Rechnet man y vom Rand des Luftspalts aus, so wird nach Gleichung (21):

$$\Phi_2 = \int_0^\infty \mathfrak{H}\, dy = \mathfrak{H}_{r2} \int_0^\infty e^{-\frac{y}{K}\sqrt[4]{i}}\, dy = \mathfrak{H}_{r2}\, K\, e^{-i\frac{\pi}{8}} \tag{22}$$

und der spezifische magnetische Widerstand des Luftspalts:

$$W_2 = \frac{\mathfrak{H}_{r2}}{\Phi_2} = \frac{1}{K}\, e^{i\frac{\pi}{8}}. \tag{23}$$

Nach Gleichung (2) ist der spezifische magnetische Widerstand des Eisens:

$$W_1 = \frac{\mathfrak{H}_r}{\Phi} = \frac{1}{\mu k}\, e^{i\frac{\pi}{4}}. \tag{24}$$

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{\mu k}{K}\, e^{-i\frac{\pi}{8}} = \frac{2K}{2\delta}\, e^{-i\frac{\pi}{8}}. \tag{25}$$

Der spezifische magnetische Widerstand des Luftspalts ist also dem Betrage nach K/δ mal größer als der des Eisens und um $22^1/_2{}^0$ gegen diesen phasenverschoben.

Gleichung (22) und (25) lassen bei breiten Polen anschauliche Deutungen für die Eindringtiefe K zu:

K ergibt mit der Feldstärke am Rande des Luftspalts und der Pollänge multipliziert den Fluß, der durch den Luftspalt geht, und

$2K$ ist der Eisenweg, der dem Betrage nach denselben magnetischen Widerstand bietet wie der Luftspalt.

2. Radialsymmetrisches Feld.

Für ein radialsymmetrisches Feld und $4\,(K/k)^4 \gg 1$ (großer Luftspalt) findet man auf ähnlichem Wege, wie im vorigen Abschnitt, wenn x dieselbe Bedeutung hat wie in Bild 6 und r den Radius bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned} \mu\,\mathfrak{H}_{x,1} &= \mathfrak{H}_0 J_0\left(\frac{r}{K} e^{j\frac{5}{8}\pi}\right) e^{-\frac{x'}{k}\sqrt{j}}, & \mathfrak{H}_{x,2} &= \mathfrak{H}_0 J_0\left(\frac{r}{K} e^{j\frac{5}{8}\pi}\right) \cos\left(\frac{x}{K}\sqrt[4]{j}\right) \\ \mathfrak{H}_{r,1} &= \mathfrak{H}_0 \frac{\delta}{K} J_1\left(\frac{r}{K} e^{j\frac{5}{8}\pi}\right) e^{\frac{x'}{k}\sqrt{j} - j\frac{3}{8}\pi}, & \mathfrak{H}_{r,2} &= -j\,\mathfrak{H}_0 J_1\left(\frac{r}{K} e^{j\frac{5}{8}\pi}\right) \sin\left(\frac{x}{K}\sqrt[4]{j}\right) \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

In diesen Gleichungen ist $\mathfrak{H}_x$ die axiale, $\mathfrak{H}_r$ die radiale Komponente der Feldstärke. K ist wieder die durch Gleichung (17) definierte Eindringtiefe für den Luftspalt. Der Verlauf von $\mathfrak{H}$, der axialen Komponente $\mathfrak{H}_{x,2}$ der Feldstärke in der Mittelebene des Luftspalts ($x = 0$), ist in Bild 6 nach Größe und Phase aufgetragen.

Es wird angenähert für kleine Argumente:

$$\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_0 = 1 + \left(\frac{r}{2K}\right)^2 \cos\frac{\pi}{4} + j\left(\frac{r}{2K}\right)^2 \sin\frac{\pi}{4},$$

und für große Argumente (Lit. 28, S. 95):

$$\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_0 = \frac{e^{\frac{r}{K}\cos\frac{\pi}{8}}}{\sqrt{2\pi r/K}} \cdot e^{-j\left(\frac{\pi}{16} - \frac{r}{K}\sin\frac{\pi}{8}\right)}. \quad (26\,a)$$

Genau wie bei der ebenen Platte steigt also die Amplitude anfangs parabolisch, später exponentiell, die Phase anfangs parabolisch, später linear an. Gegenüber der ebenen Platte ist bei großen Argumenten die Phasenverschiebung um $11{,}25^0$ kleiner, die Amplitude im Verhältnis $1 : \sqrt{\frac{1}{2}\pi\, r/K}$ geschwächt, wenn das Feld in der Mitte in beiden Fällen die gleiche Größe hat.

b) Spezielle Lösungen für einen großen Luftspalt ($K/k \gg 1$).

1. Polquerschnitt rechteckig.

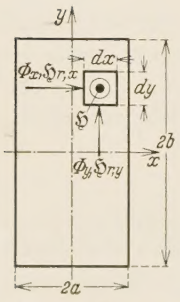


Bild 7. Zur Bestimmung des Feldverlaufs im Luftspalt von Polen mit rechteckigem Querschnitt.

Liegt ein Luftspalt vor, der die Bedingung $K/k \gg 1$ erfüllt, so hat die Induktion im Eisen im wesentlichen nur eine Komponente parallel zur Oberfläche, die Induktion in der Luft nur eine Komponente senkrecht zur Polfläche [s. Gleichung (20) und (26)]. Ferner ist nach Gleichung (2) der spezifische Fluß in der Eisenhaut mit der Randfeldstärke durch die Beziehung verknüpft:

$$\Phi = \mu\,\mathfrak{H}_r\, k\, e^{-j\frac{\pi}{4}}. \quad (27)$$

Unter diesen Voraussetzungen leitet man aus Bild 7, in der die Polfläche in Aufsicht gezeichnet ist, leicht folgende Gleichungen ab:

$$\mathfrak{H} = \operatorname{div}\Phi = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} = \mu\, k\, e^{-j\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_{r,x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_{r,y}}{\partial y}\right), \quad (28)$$

$$\mathfrak{H}_{r,x} = \delta \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x}, \qquad \mathfrak{H}_{r,y} = \delta \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y}. \tag{29a u. b}$$

$\mathfrak{H}_{r,x}$ und $\mathfrak{H}_{r,y}$ sind die Komponenten von $\mathfrak{H}_r$ in der x- und y-Richtung, δ bedeutet die halbe Weite des Luftspalts.

Damit folgt als Differentialgleichung für die Feldstärke $\mathfrak{H}$ im Luftspalt:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial y^2} = \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{K^2} \mathfrak{H}. \tag{30}$$

Im größten Teil des Luftspalts wird sich das Feld angenähert so verhalten, als ob die Polfläche unendlich lang ($2b = \infty$) wäre. Man setze deshalb an:

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_{r2}} = \frac{\mathfrak{Cof}\left(\frac{x}{K}\sqrt[4]{j}\right)}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{a}{K}\sqrt[4]{j}\right)} + \sum_{n=1,3,5} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\frac{x}{a}\right) \mathfrak{Cof}\left(\sqrt[4]{j}\,\frac{y}{K_n}\right). \tag{31}$$

Hier ist $\mathfrak{H}_{r2}$ die Feldstärke im Luftspalt längs der Randlinien $x = \pm a$. Der Ausdruck unter dem Summenzeichen stellt die Korrektur zur Berücksichtigung der endlichen Länge der Polfläche dar. Bestimmt man die Koeffizienten A_n und K_n derart, daß auch längs der Randlinien $y = \pm b$ die Feldstärke $= \mathfrak{H}_{r2}$ wird, so findet man:

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_{r2}} = \frac{\mathfrak{Cof}\left(\sqrt[4]{j}\,\frac{x}{K}\right)}{\mathfrak{Cof}\left(\sqrt[4]{j}\,\frac{a}{K}\right)} + \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{m=0,1,2\ldots \\ n=2m+1}} \frac{\mathfrak{Cof}\left(\sqrt[4]{j}\,\frac{y}{K_n}\right)}{\mathfrak{Cof}\left(\sqrt[4]{j}\,\frac{b}{K_n}\right)} (-1)^m \frac{\cos n\frac{\pi}{2}\frac{x}{a}}{n(1+n^2\varepsilon^2)}. \tag{32}$$

Hier ist gesetzt:

$$\varepsilon = \sqrt[4]{-j}\,\frac{\pi}{2}\frac{K}{a}, \qquad K_n^2 = \frac{K^2}{1+\varepsilon^2 n^2}. \tag{33a u. b}$$

Wie man aus Gleichung (32) ersieht, nehmen die Glieder unter dem Summenzeichen mit wachsendem n rasch ab, es genügt praktisch fast stets die Berücksichtigung des ersten Gliedes der Reihe.

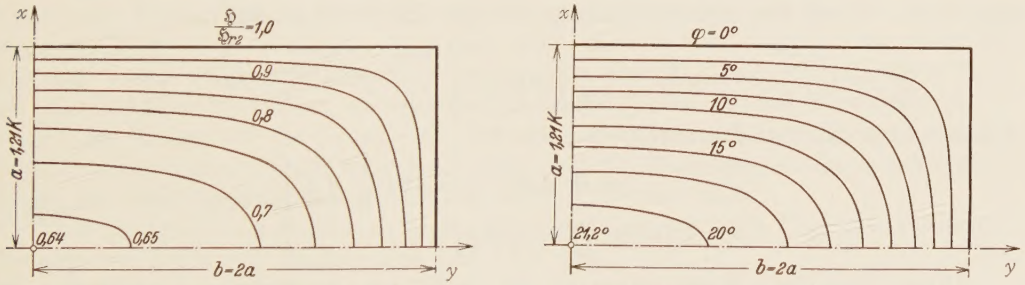


Bild 8 und 9. Die Linien gleicher Feldstärke und gleicher Phasenverschiebung im Luftspalt von rechteckigen Polen. (Theoretisch.)

Nach Gleichung (32) wurden für ein Rechteck vom Seitenverhältnis 1 : 2 ($2a = 2{,}5$ cm, $2b = 5$ cm) und für $\omega = 3000$/sec, $2\delta = 3$ mm, $\varrho = 10^4$ (EME), $\mu = 200$ die Linien gleicher Amplitude und gleicher Phase ermittelt. Die Ergebnisse sind in Bild 8 u. 9 für ein Viertel des Rechtecks dargestellt. In der Mitte und in den Ecken ändern sich Amplitude und Phase nur sehr wenig. Bei einer unendlich ausgedehnten Platte von der Dicke $2a$ würde die Amplitude nach innen auf 0,617 $\mathfrak{H}_{r2}$ abnehmen, die Phase sich um 21,8° ändern. Die Differenz gegenüber den wirklichen Werten (s. Bild 8 u. 9) ist also nur sehr gering.

Für größere Seitenverhältnisse als 1 : 2 verschwindet der Einfluß der Schmalseite auf das Feld im Innern immer mehr. Für annähernd quadratische Querschnitte ersetzt man das Rechteck für die Berechnung des Gesamtflusses besser durch einen Kreis vom gleichen Umfang.

2. Einfluß der Hysteresis.

Um den Einfluß der magnetischen Hysteresis des Eisens zu übersehen, ersetze man in üblicher Weise die Hysteresisschleife durch eine Ellipse mittels der Gleichungen:

$$\mathfrak{B} = \mu_0 \mathfrak{H} e^{-j\alpha} \text{ und } \mu = \mu_0 e^{-j\alpha},$$

wo μ_0 den Absolutwert von μ und α die Phasenverschiebung zwischen Induktion und Feldstärke bedeutet.

Es wird dann nach Gleichung (17) die Eindringtiefe für den Luftspalt

$$K_1 = \sqrt[4]{\frac{\mu \varrho \delta^2}{4\pi\omega}} = K e^{-j\frac{\alpha}{4}}, \tag{34}$$

und z. B. für die unendliche Platte nach Gleichung (20):

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \mathfrak{Cof}\left[\frac{y}{K}\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right) + j\frac{y}{K}\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)\right]. \tag{35}$$

Die Amplitude des Hyperbelcosinus wird in der Hauptsache durch den Realteil des Argumentes, die Phase durch den Imaginärteil bestimmt. Man erkennt also: Die Hysteresis bewirkt eine Verkleinerung der Amplitudenänderung und eine Vergrößerung der Phasenverschiebung. Nimmt man z. B. an, daß der Winkel $\alpha = 6^0$ beträgt, so nimmt für $y : K = 2$ die Amplitude durch die Hysteresis um 2,3% ab, die Phasenverschiebung um $6{,}5^0$ zu, wenn man die Werte für $y/K = 0$ festhält.

Ist das Eisen so stark, daß das Feld im Luftspaltinnern verschwindet, so wird das Verhältnis des spezifischen magnetischen Widerstandes des Luftspalts zu dem des Eisens nach Gleichung (25) und (34):

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{K}{\delta} e^{-j\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)},$$

wird also durch die Hysteresis nur der Phase, nicht dem Betrage nach geändert.

Sind die Pole rund, so macht die Berechnung der neuen Funktion J_0 für den Phasenwinkel $\vartheta = \frac{5}{8}\pi + \frac{\alpha}{4}$ Schwierigkeiten. Ersetzt man aber J_0 für große Argumente (r/K) durch den Näherungsausdruck (Lit. 23, S. 95 u. 101):

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_0} = J_0\left(\frac{r}{K}e^{j\vartheta}\right) \approx \frac{1}{2}H_p^{(2)}\left(\frac{r}{K}e^{j\vartheta}\right) \approx \frac{e^{\frac{r}{K}\sin\vartheta}}{\sqrt{2\pi r/K}} e^{-j\left(r\cos\vartheta - \frac{1}{4}\pi + \frac{\vartheta}{2}\right)},$$

so findet man durch Differentiation nach ϑ:

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{\Delta\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}}\right| &\approx \frac{r}{K}\cos\vartheta\cdot\Delta\vartheta \approx -0{,}104\,\frac{r}{K}\Delta\alpha \\ \Delta\varphi &\approx \left(0{,}228\,\frac{r}{K} - 0{,}125\right)\Delta\alpha \end{aligned}\right\} \tag{35a}$$

Bringt man diese Korrekturen an den in Bild 6 gezeichneten Kurven für $|\mathfrak{H}|$ und φ an, so erhält man mit genügender Näherung die Kurven für $|\mathfrak{H}|$ und φ, die für $r/K \gtrless 1{,}5$ mit Berücksichtigung der Hysteresis gelten. Für kleinere Argumente kann man gefühlsmäßig die korrigierten Kurven an die gezeichneten asymptotisch annähern.

3. Einfluß der Eisensättigung.

Um den Einfluß der Eisensättigung abzuschätzen, sei im folgenden die ideale Annahme gemacht, daß der absolute Betrag $\mathfrak{B}$ der Induktion im Eisen in der ganzen Eindringtiefe konstant sei („Ideale Sättigung")[1]. Über die Phase von $\mathfrak{B}$ ist hiermit noch nichts ausgesagt. Sie ist nicht konstant. $\mathfrak{B}$ ist vielmehr überall in Phase mit der Feldstärke $\mathfrak{H}_1$. Um eine vektorielle Beziehung zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}_1$ zu bekommen, setze man:

[1] „Ideale Sättigung" zeigen näherungsweise Eiseneinkristalle. Vgl. die Messungen von Gries und Esser, Arch. Elektrotechn. XXII, 1929 S. 145.

$$\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{B}}\left(\frac{\mathfrak{B}}{\overline{\mathfrak{B}}}\right) = \overline{\mathfrak{B}}\left(\frac{\mathfrak{H}_1}{\overline{\mathfrak{H}}_1}\right). \tag{36}$$

Hier ist $\overline{\mathfrak{B}}$, der Betrag von $\mathfrak{B}$, ein Skalar. $\frac{\mathfrak{B}}{\overline{\mathfrak{B}}} = \frac{\mathfrak{H}_1}{\overline{\mathfrak{H}}_1}$ ist ein Einheitsvektor, der in Phase mit der Feldstärke $\mathfrak{H}_1$ ist. Die Untersuchung beschränkt sich auf die Behandlung des ebenen Feldes. Es wird zuerst der Feldverlauf im Eisen, dann der im Luftspalt mathematisch erfaßt.

Der Feldverlauf im Eisen. Es wird wieder vorausgesetzt, daß die Eindringtiefe klein gegenüber den Abmessungen des Eisens ist und die Kraftlinien parallel zur Oberfläche verlaufen. Als Koordinate x führe man den Abstand vom inneren Rand der Eindringtiefe ein, welche die Dicke k_2 habe. Man findet dann mit den früheren Bezeichnungen (s. Gleichungen 4a u. 5a):

$$\frac{d\,\mathfrak{E}}{d\,x} = j\,\omega\,\overline{\mathfrak{B}}\left(\frac{\mathfrak{B}}{\overline{\mathfrak{B}}}\right) = j\,\omega\,\overline{\mathfrak{B}}\left(\frac{\mathfrak{H}_1}{\overline{\mathfrak{H}}_1}\right), \tag{37}$$

$$\frac{d\,\mathfrak{H}_1}{d\,x} = 4\,\pi\,\frac{\mathfrak{E}}{\varrho}. \tag{37a}$$

Setzt man

$$k_1^2 = \frac{\varrho}{4\,\pi\,\omega}, \tag{38}$$

so verschmelzen Gleichung (37) und (37a) zu der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\,\mathfrak{H}_1}{d\,x^2} = \frac{j}{k_1^2}\,\overline{\mathfrak{B}}\left(\frac{\mathfrak{H}_1}{\overline{\mathfrak{H}}_1}\right). \tag{38a}$$

Setzt man ferner:

$$k_2^2 = k_1^2\,3\,\sqrt{2}\,\frac{\overline{\mathfrak{H}}_r}{\overline{\mathfrak{B}}}, \tag{39a}$$

so weist man durch Einsetzen nach, daß

$$\mathfrak{H}_1 = \frac{\overline{\mathfrak{B}}}{k_1^2\,3\,\sqrt{2}}\,x^{2+j\sqrt{2}} = \overline{\mathfrak{H}}_r\,\frac{x^2}{k_2^2}\,e^{j\sqrt{2}\,\ln x}, \quad \frac{\mathfrak{H}_1}{\overline{\mathfrak{H}}_1} = x^{j\sqrt{2}} = e^{j\sqrt{2}\,\ln x} \tag{39b u. c}$$

eine singuläre Lösung der Gleichung (38a) ist. Sie ist die richtige Lösung, weil $\mathfrak{H}_1$ im Innern des Eisens jenseits der Eindringtiefe k_2 verschwindet und für $x = 0$ die Bedingung $d\,\mathfrak{H}_1/dx = 0$ erfüllt ist. Wie man sieht, hat die Eindringtiefe eine reelle Bedeutung. Das Feld dringt tatsächlich nur in einer Schicht von der Dicke k_2 ins Eisen ein. Die Ursache hierfür ist, daß die Permeabilität gemäß unserer Voraussetzung im Innern des Eisens, wo die Feldstärke immer kleiner wird, sich dem Werte unendlich nähert. Hiermit findet auch seine Erklärung, daß die Phasenverschiebung am inneren Rande der Eindringtiefe unendlich groß wird ($\ln 0 = -\infty$).

Da die Induktion in Phase mit der Feldstärke ist, wird der Fluß pro Zentimeter Umfang mit Hilfe der Gleichungen (39) und (36):

$$\Phi = \int_0^{k_2} \mathfrak{B}\,d\,x = \overline{\mathfrak{B}}\int_0^{k_2} x^{j\sqrt{2}}\,d\,x = \left[\frac{\overline{\mathfrak{B}}}{\sqrt{3}}\,e^{-j\,\alpha}\,.\,x\,e^{j\sqrt{2}\,\ln x}\right]_0^{k_2} \tag{40}$$

$$\Phi = \frac{\overline{\mathfrak{B}}}{\sqrt{3}}\,e^{-j\,\alpha}\,k_2\,e^{j\sqrt{2}\,\ln k_2}, \qquad \overline{\Phi} = \frac{\overline{\mathfrak{B}}\,k_2}{\sqrt{3}}. \tag{41}$$

Der Fluß steigt nach Gleichung (40) linear nach dem Rande zu an. α ist die Phasenverschiebung zwischen dem Fluß und der Induktion bzw. der Feldstärke und beträgt

$$\alpha = 54^0\,44',1. \quad \left(\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}\right). \tag{42}$$

Bei der Rechnung mit konstanter Permeabilität war dieser Winkel 45^0.

Setzt man noch

$$\frac{\overline{\mathfrak{B}}}{\overline{\mathfrak{H}}_r} = \mu, \quad k^2 = \frac{k_1^2}{\mu} = \frac{\varrho}{4\,\pi\,\omega\,\mu},$$

so wird der spezifische magnetische Widerstand des Eisens:

$$W_1 = \mathfrak{H}_r/\Phi = e^{j\,\alpha}/\mu\,\sqrt[4]{2}\,k. \tag{43}$$

Diese Gleichung deckt sich bis auf den Faktor $\sqrt[4]{2} = 1{,}189$ und bis auf den etwas größeren Winkel α genau mit der Gleichung (24), S. 239, für konstante Permeabilität. Doch ist zu beachten, daß in Gleichung (43) μ nicht die mittlere, sondern die kleinste Permeabilität ist. k ist nicht identisch mit der wirklichen Eindringtiefe k_2.

Die Ergebnisse sind in Bild 10 dargestellt und mit denen für konstante Permeabilität verglichen. Hierbei ist angenommen, daß der Gesamtfluß und die Randinduktion in beiden Fällen übereinstimmen.

Der Feldverlauf im Luftspalt. Bedeutet $\mathfrak{H}$ die Feldstärke im Luftspalt der unendlich ausgedehnten Pole und y die Koordinate parallel zu den Polflächen, so ist nach Gleichung (28) und (29b), wenn man nunmehr y von außen nach innen rechnet:

$$\mathfrak{H} = -\frac{d\Phi}{dy}, \qquad \mathfrak{H}_r = -\delta \frac{d\mathfrak{H}}{dy}, \tag{44a u. b}$$

woraus folgt:

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} = \frac{\mathfrak{H}_r}{\delta}. \tag{45}$$

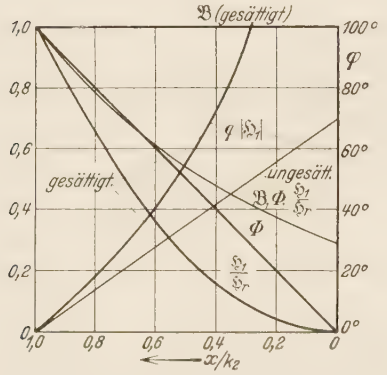


Bild 10. Verlauf des Flusses und der Amplitude und Phase der Feldstärke in einem ideal gesättigten Eisen ($\mathfrak{B}$ unabhängig von $\mathfrak{H}$), verglichen mit dem Verlauf bei konstanter Permeabilität.

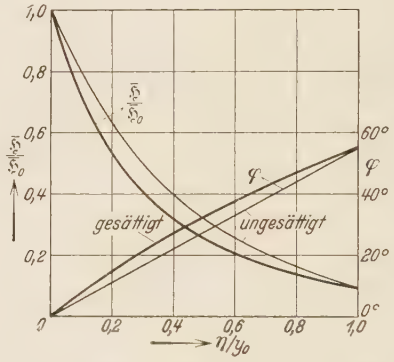


Bild 11. Zu Bild 10 gehöriger Feldverlauf im Luftspalt von unendlich starken Polen in der Nähe des Randes. $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_0$ ist für $\eta/y_0 = 0$ und 1 für gesättigtes und ungesättigtes Eisen gleich groß angenommen, woraus sich $K = 0{,}444\ y_0$ errechnet.

Bedenkt man, daß nach den Gleichungen (39) und (41)

$$\overline{\mathfrak{H}}_r = \frac{\overline{\mathfrak{B}}}{k_1^2\sqrt{2}} \frac{\overline{\Phi}^2}{\overline{\mathfrak{B}}^2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}_r = \overline{\mathfrak{H}}_r \frac{\Phi}{\overline{\Phi}} e^{j\alpha} \tag{46a u. b}$$

ist, so kann man Gleichung (45) auch die Form geben:

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} = \frac{1}{C_1} \overline{\Phi}^2 \left(\frac{\Phi}{\overline{\Phi}}\right) e^{j\alpha}. \tag{47}$$

Hier ist gesetzt:

$$C_1 = \delta\, k_1^2\, \overline{\mathfrak{B}}\, \sqrt{2}. \tag{47a}$$

Eine singuläre Lösung von Gleichung (47) ist gegeben durch:

$$\Phi = \sqrt{3}\,(6 - b^2)\, C_1\, y^{-2}\, e^{-jb \ln y}, \tag{48}$$

wo b bestimmt ist aus der Gleichung:

$$b = \frac{b^2 - 6}{5} \operatorname{tg}\alpha \text{ zu } b = \frac{\sqrt{73} - 5}{\sqrt{8}} = 1{,}2529. \tag{48a}$$

Durch Differentiation erhält man aus Gleichung (48) die Feldstärke im Luftspalt:

$$\mathfrak{H} = -\frac{d\Phi}{dy} = \sqrt{3}\,(6 - b^2)\,\sqrt{4 + b^2}\, C_1 e^{j\beta}\, y^{-3-jb}. \tag{49}$$

β ist die Phasenverschiebung zwischen der Feldstärke im Luftspalt und dem Fluß im Eisen und konstant $= 32^0\,4',0$. Bei konstanter Permeabilität des Eisens betrug dieser Winkel $22{,}5^0$.

Gleichung (49) stellt nur eine richtige Lösung des Problems dar, wenn man 1. die Koordinaten von außen nach innen im Luftspalt fortschreitend rechnet, 2. die Eisenplatten so dick annimmt, daß das Feld im Innern des Luftspalts praktisch verschwindet. Gleichung (49) beschreibt dann nur den Feldverlauf in der einen Hälfte des Luftspalts, in der anderen Hälfte wäre eine symmetrische Lösung anzusetzen. Eine Vereinigung beider Lösungen ist nicht möglich, weil die Differentialgleichung nicht linear ist.

Um Gleichung (49) eine übersichtlichere Form zu geben, setze man am „Rande" (Bild 3) des Luftspalts $y = y_0$ und die Feldstärke $= \mathfrak{H}_{r2}$ und führe eine neue Koordinate η ein durch die Beziehung:

$$y = y_0 + \eta.$$

Man findet dann mit Hilfe der Gleichungen (44b) und (49) unter Benutzung der Beziehungen (47a), (38a) und (48a) und der Definitionsgleichung:

$$\mu = \left(\overline{\mathfrak{B}}/\mathfrak{H}_r\right)_{y = y_0},$$

$$y_0 = \sqrt[4]{(6 - b^2)\sqrt{4 + b^2}\sqrt{9 + b^2}\cdot\sqrt{6}}\sqrt[4]{\frac{\mu\varrho\delta^2}{4\pi\omega}} = 3{,}0207\sqrt[4]{\frac{\mu\varrho\delta^2}{4\pi\omega}} = 3{,}0207\cdot K. \qquad (50)$$

K ist völlig identisch mit dem Parameter K, der den Feldverlauf im Luftspalt bei konstanter Permeabilität bestimmte. Jedoch ist zu beachten, daß μ nicht die mittlere, sondern die kleinste vorkommende Permeabilität bezeichnet.

Man kann nunmehr schreiben:

$$\overline{\mathfrak{B}} = \text{const}: \quad \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_{r,2}} = \frac{e^{-j\,b\ln\left(1+\frac{\eta}{y_0}\right)}}{\left(1+\frac{\eta}{y_0}\right)^3} = e^{-3\ln\left(1+\frac{\eta}{y_0}\right) - j\,b\ln\left(1+\frac{\eta}{y_0}\right)}. \qquad (51)$$

Für konstante Permeabilität würde man erhalten:

$$\mu = \text{const}: \quad \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_{r,2}} = e^{-\frac{\eta}{K}\cos\frac{\pi}{8} - j\frac{\eta}{K}\sin\frac{\pi}{8}}. \qquad (51\,a)$$

Die Ähnlichkeit der Ausdrücke (51) und (51a) ist überraschend. Phase und Dämpfung stehen bei konstanter Permeabilität im Verhältnis $\operatorname{tg}\pi/8$, bei konstanter Induktion fast genau in demselben Verhältnis. Denn es ist $b/3 = \operatorname{tg}(22^0\,40',1)$. Dies bedeutet: Stehen die Feldstärken an zwei verschiedenen Orten des Luftspalts in einem bestimmten Verhältnis zueinander, so entspricht diesem Verhältnis fast dieselbe Phasenverschiebung, gleichgültig, ob es sich um gesättigtes oder ungesättigtes Eisen handelt. In der Mitte zwischen beiden angenommenen Orten verlaufen aber die Amplitude und die Phase bei gesättigtem Eisen mit stärkerer Krümmung (Bild 11).

Bestimmt man wieder mit Hilfe der Gleichungen (48), (49), (43), (17) und (50) für den Luftspalt und das Eisen die spezifischen magnetischen Widerstände, so stellt man fest, daß das Verhältnis

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{\mathfrak{H}_{r,2}/\Phi}{\mathfrak{H}_r/\Phi} = \frac{\sqrt{4 + b^2}}{y_0}e^{j\beta}\cdot\mu\sqrt[4]{2}\cdot k\cdot e^{-j\alpha} = 0{,}9291\,\frac{2K}{2\delta}\,e^{-j\,(22^0\,40',1)}$$

sich praktisch nur wenig von dem bei konstanter Permeabilität unterscheidet [siehe Gleichung (25)], wenn man nur beachtet, daß μ bei der Bestimmung von W_2/W_1 kein Mittelwert, sondern die kleinste Permeabilität des Eisens ist.

Literaturverzeichnis.

A. Das Wirbelstromproblem für massives Eisen.

1. J. J. Thomson, Electrician Bd. 28 (1892) S. 599. — 2. Zenneck, Ann. Physik Bd. 11 (1903) S. 867. — 3. Debye, Z. Mathem. u. Physik Bd. 54 (1907) S. 418. — 4. Dreyfus, Arch. Elektrotechn. Bd. 4 (1916) S. 99 u. 314. — 5. u. 6. Arkadiew, Physik. Z. Bd. 14 (1913) S. 1928; Z. Physik Bd. 27 (1924) S. 37. — 7. Truxa, Arch. Elektrotechn. Bd. 9 (1921) S. 227. — 8. Rosenberg, ETZ (1923) S. 513, S. 1055, S. 1074. — 9. Wwedensky, Z. Physik. Bd. 34 (1925) S. 309. — 10. Ollendorff, Arch. Elektrotechn. Bd. 14 (1925) S. 431. — 11. Mittelstraß, Arch. Elektrotechn. Bd. 18 (1927)

S. 595. — 12. Strutt, Arch. Elektrotechn. Bd. 18 (1927) S. 190. — 13. Schwenckhagen, Arch. Elektrotechn., Bd. 17 (1927) S. 537. — 14. Ermolaev, Arch. Elektrotechn. Bd. 23 (1930) S. 101. — 15. Antik, Arch. Elektrotechn. Bd. 25 (1931) S. 125. — 16. Grünwald, Arch. Elektrotechn. Bd. 26 (1932) S. 513. — 17. Krämer, Wirbelströme in massivem Eisen. Dissertation, Braunschweig 1932.

B. Das Wirbelstromproblem unter Berücksichtigung des Luftspalts.

18. Rüdenberg, ETZ (1906) S. 109. — 19. Fröhlich, Arch. Elektrotechn. Bd. 26 (1932) S. 321.

C. Allgemeine Literatur.

20. G. Haberland, Z. angew. Mathem. u. Mech. Bd. 6 (1926) S. 366. — 21. Keinath, Die Technik elektrischer Messgeräte. 1928. — 22 Fraenckel, Theorie der Wechselströme, 3. Aufl. (1930). — 23. Jahnke u. Emde, Funktionentafeln, Leipzig u. Berlin 1909.

Experimentelle Untersuchung des magnetischen Wechselfeldes im Luftspalt von massivem Eisen.

Inhalt: Es wird über die experimentelle Untersuchung eines mit Wechselstrom magnetisierten massiven Eisenringes mit Luftspalt berichtet. Die Meßmethoden und -aparate werden beschrieben. Die Theorie[1] wird für rechteckige und runde Pole im wesentlichen bestätigt.

Übersicht und Ziel. Erregt man zwei Pole aus massivem Eisen, die einander im Abstand $2\,\delta$ gegenüberstehen, mit Wechselstrom, so ist nach den theoretischen Untersuchungen, die ich früher durchgeführt habe, das Feld im Luftspalt inhomogen[1]. Die Feldstärke nimmt nach dem Luftspaltinnern hin ab und erleidet hierbei eine Phasenverschiebung. Die Amplitude und die Phase der Feldstärke ändern sich um so stärker, je kleiner die Eindringtiefe $K = \sqrt[4]{\frac{\varrho\,\mu\delta^2}{4\pi\omega}}$ ist. Setzt man in dieser Formel die Permeabilität μ konstant, so ergeben sich für technisches Eisen Abweichungen im Feldverlauf: Die Hysteresis vergrößert hauptsächlich die Phasenverschiebung. Die Eisensättigung bewirkt am Rande des Luftspalts eine größere, im Luftspaltinnern eine geringere Änderung der Feldstärke. Stehen die Beträge der Feldstärke an zwei Stellen des Luftspalts bei gesättigtem und ungesättigtem Eisen im gleichen Verhältnis, so ist die Phasenverschiebung in beiden Fällen praktisch gleich groß.

Im folgenden werden die Verfahren beschrieben, mit denen die Rechnung experimentell nachgeprüft wurde. Für Pole von rechteckigem und rundem Querschnitt werden Meßergebnisse mitgeteilt.

I. Die Meßmethoden.

Der prinzipielle Aufbau der Meßeinrichtung ist in Bild 12 dargestellt. (Vgl. Bild 3 der theoretischen Arbeit[1].) Ein magnetischer Kreis wurde durch Wechselspannung erregt. Der Luftspalt war zwischen 0 und 12 mm durch Verschiebung der massiven Pole einstellbar. Auf die Pole konnten Polschuhe beliebiger Form aufgesetzt werden. Das Joch bestand anfangs aus massivem Eisen, später aus 0,5 mm starkem Transformatorenblech. Die Wicklung war aus praktischen Gründen an einer Stelle konzentriert.

[1] Arch. Elektrotechn. Auf diesen Aufsatz wird im folgenden stets mit der Bezeichnung: „Die theoretische Arbeit" Bezug genommen.

Das Feld im Luftspalt wurde nach zwei verschiedenen Methoden untersucht:
a) durch Bestimmung des Drehmomentes, das auf eine Drehspule ausgeübt wird,
b) durch Messung der EMK, welche in einer festen Spule entsteht.

a) Die Messungen mit der Drehspule.

1. Der Aufbau der Drehspul-Meßeinrichtung.

Durch die leicht drehbare Meßspule des Bildes 13 wurde ein Strom geschickt und die Drehung derselben im Luftspaltfelde mit Fernrohr und Spiegel nach der subjektiven Methode beobachtet.

Der Aufbau der Meßeinrichtung geht genügend klar aus Bild 13 hervor. Im besonderen ist noch zu bemerken:

Die Meßspule wurde auf ein Glasstäbchen von etwa $^1/_2$ mm Durchmesser aufgewickelt, um ihre Achse genau festzulegen. Sie erhielt etwa 200 Windungen von

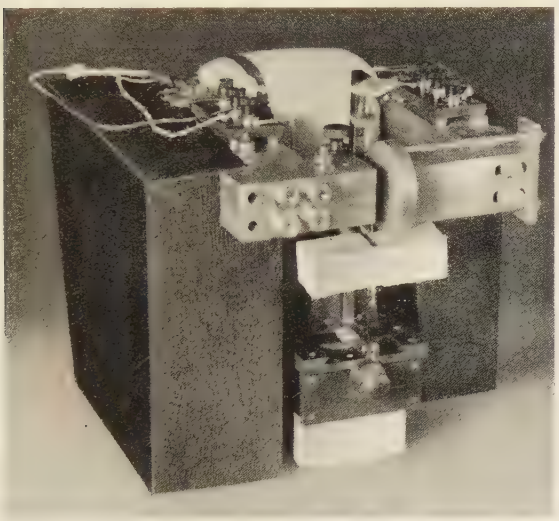


Bild 12. Aufbau des untersuchten magnetischen Kreises. In Bild 12 ist auf den rechten Pol ein runder Polschuh aufgesetzt. Im Hintergrund ist die Erregerspule, am Luftspalt der Galgen mit der Drehspulmeßeinrichtung sichtbar.

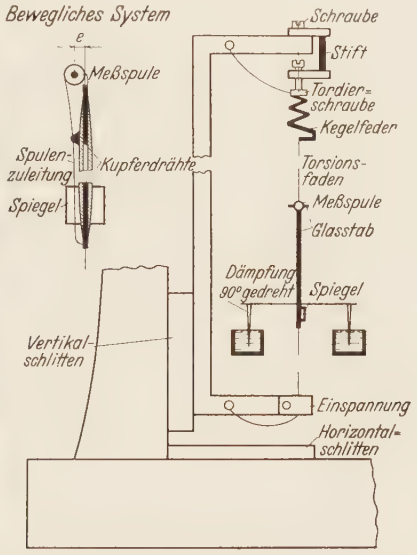


Bild 13. Aufbau der Drehspulmeßeinrichtung.

lackiertem Kupferdraht von 0,04 mm Durchmesser. Der Außendurchmesser der Spule betrug etwa 2,5 mm. Der Torsionsfaden war ein Bronzedraht von 0,05 bzw. 0,03 mm Durchmesser und übernahm gleichzeitig die Stromzufuhr. Das Tordierschräubchen diente dazu, die Achse der Meßspule parallel zu den Polflächen einzustellen. Die Kegelfeder, an der der obere Torsionsfaden angelötet war, konnte so geschwenkt werden, daß das bewegliche System genau senkrecht hing. Dies war vor allem bei Verwendung des Drahtes von 0,03 mm Durchmesser wichtig, da sonst ein recht erheblicher Fehlausschlag eintrat, der durch die starke Erwärmung des Torsionsdrahtes beim Stromdurchgang (bis etwa 40 mA) hervorgerufen wurde. Der Galgen konnte mit Hilfe zweier feingängiger Schrauben in horizontaler und senkrechter Richtung um je etwa 60 mm verschoben werden. Das durch die Wirbelströme erwärmte massive Eisen rief eine heftige Konvektionsströmung der Luft hervor. Das bewegliche System wurde deshalb mit Glyzerin stark gedämpft.

Zur Abhaltung der äußeren Luftströmungen wurde die gesamte Meßeinrichtung einschließlich des Eisens und der Erregerspule mit einem Pappkarton abgedeckt, in

den vorne eine dünne Glasscheibe eingesetzt war, um den Spiegel beobachten zu können. Die Entfernung Spiegel—Fernrohr betrug meist etwa 2 m.

2. Das Meßprinzip.

Um das Wesentliche der Vorgänge im Luftspalt zu erfassen, darf man nur die Grundwellen des Feldes und der Induktion berücksichtigen, denn nur für sinusförmigen Verlauf hat es Sinn, von Amplitude und Phasenverschiebung zu sprechen, auch die theoretischen Ableitungen des früheren Aufsatzes gelten nur für Sinusfelder. Die Abweichungen von der Sinusform waren überdies gering, da mit annähernd sinusförmiger Spannung ohne Vorwiderstand gearbeitet wurde, also der erzeugte Fluß auch sinusförmig war und nur durch die bei variablem μ nicht sinusförmige Streuung längs des Eisens seine Form etwas änderte.

Zur Messung wurde die Meßspule an das Netz der Erregerspule gelegt. Die Meßspule dreht sich dann um einen Winkel

$$\alpha = c\, i\, \mathfrak{H} \cos\varphi. \tag{1}$$

Hierin ist

i der sinusförmige Strom der Meßspule $[A]$,
$\mathfrak{H}$ die Grundwelle der Feldstärke im Luftspalt $[I']$,
c eine Konstante,
φ die Phasenverschiebung zwischen $\mathfrak{H}$ und i.

Gemessen wurden i, $\mathfrak{H}$ und φ, durch Eichung festgelegt wurde c.

Amplitude und Phase der Feldstärke im Luftspalt wurden nun auf die Weise bestimmt, daß der Strom in der Meßspule eine meßbare Phasenverschiebung gegenüber der Netzspannung erhielt. Sind Strom und Feldstärke in Phase, so wird α in Gleichung (1) ein Maximum und man mißt die Amplitude der Feldstärke; sind sie um 90^0 phasenverschoben, so ist $\alpha = 0$ und man mißt die Phasenverschiebung der Feldstärke gegen einen Vektor, der der Netzspannung um 90^0 nacheilt.

3. Die Schaltung für 50 Hz (s. Bild 14).

Die Erregerspule wurde ohne Zwischenschaltung eines Widerstandes über einen Transformator vom Netz gespeist und die Erregung durch Änderung der Netzspannung oder der Anzapfung auf der Sekundärseite des Transformators geändert.

Die Meßspule wurde über einen induktionsfreien Widerstand an einen Spannungswandler angeschlossen, der seinerseits von der Sekundärseite eines Drehtransformators gespeist wurde. An einer in 360^0 eingeteilten Scheibe, die auf der Achse des Drehtrafos befestigt war, konnte die Phasenverschiebung unmittelbar abgelesen werden.

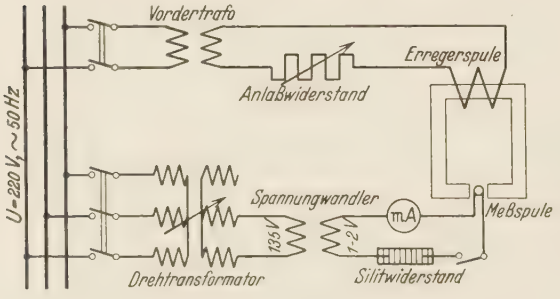


Bild 14. Schaltbild für die Messungen mit der Drehspule bei 50 Hz.

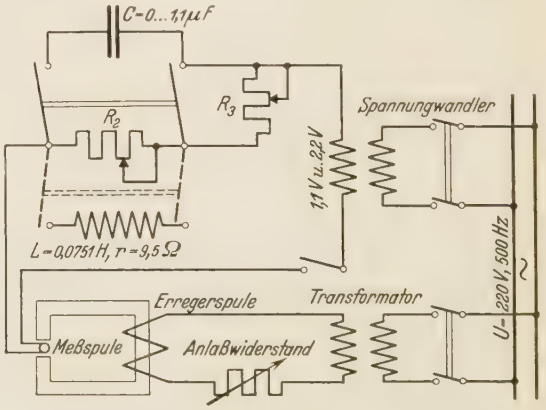


Bild 15. Schaltbild für die Messungen mit der Drehspule bei 500 Hz.

Die Erregung des magnetischen Kreises wurde nie direkt ein- oder ausgeschaltet, weil sich herausstellte, daß das vorher sorgfältig entmagnetisierte Eisen nach dem

direkten Einschalten remanenten Magnetismus angenommen hatte. Die Erregung wurde deshalb feinstufig und langsam angelassen und wieder ausgeschaltet.

Bei den Messungen wurden folgende Fehler berücksichtigt:

1. Schwankungen der Spannung und Frequenz.

2. Die Erwärmung des Eisens durch die Wirbelströme. Diese bedingte eine Änderung des Flusses im Eisen und der Feldstärke im Luftspalt, die bei Verwendung des massiven Joches etwa $4^0/_{00}/^0$ C, bei einem Joch aus lamelliertem Eisen etwa $0{,}5^0/_{00}/^0$ C ausmachte.

3. Der oben erwähnte Fehlausschlag, den die Erwärmung des Torsionsdrahtes hervorrief. Er konnte auf weniger als 1 mm Skalenlänge beschränkt werden.

Ohne Einfluß waren die Fehler, die dadurch hervorgerufen wurden, daß

4. die Achse der Meßspule nur annähernd senkrecht zu den Kraftlinien im Luftspalt eingestellt werden konnte,

5. das Feld infolge der veränderlichen Permeabilität des Eisens durch den Meßspulenstrom nichtlinear verzerrt wurde.

4. Die Schaltung für 500 Hz (Bild 15).

Für 500 Hz stand nur Einphasenstrom zur Verfügung. Die Phasenverschiebung im Meßstromkreis wurde deshalb mit Drossel und Kondensator erzeugt. In der unteren Stellung des Umschalters liegt R_2 parallel zu der Drossel L und R_3 vor der Drossel, die geeicht und unveränderlich ist. Durch gleichzeitige Änderung der Präzisionsstöpselwiderstände R_2 und R_3 kann die Phase des Meßstromes zwischen 0 und fast 90^0 verschoben werden, während der Meßstrom konstant bleibt. In der oberen Stellung des Umschalters ist R_3 kurzgeschlossen und R_2 liegt parallel zum Kondensator C. Durch gleichzeitige Änderung von R_2 und C kann bei konstantem Strom die Phase zwischen 0 und fast 90^0 voreilend gemacht werden.

Die unter 3. 1 bis 5 genannten Fehler traten auch hier auf. Hinzu kam noch, daß

6. die Oberwellen des Stromes im Meßspulenkreis bisweilen sehr erheblich waren. Da sie aber gegenüber der Grundwelle nur ein Drehmoment von höchstens 1...2% hervorriefen, wurde auf die Unterdrückung der Oberwellen verzichtet, und Phase und Amplitude der Grundwelle wurden unter Berücksichtigung des Ohmschen Widerstandes der Meßspule (25...50 Ω) berechnet. Da die Präzisionswiderstände, -drosseln und -kondensatoren keine merklichen Fehlerquellen aufwiesen, konnte bei diesem Verfahren der Meßfehler nicht größer als 1...2% werden.

b) Die Messungen mit der festen Spule.

1. Die Meßeinrichtungen.

Der Aufbau der Meßeinrichtungen war im wesentlichen derselbe wie bei den Messungen mit beweglicher Spule. Die feste Spule besaß einen äußeren Durchmesser von etwa 4 mm und einen inneren Durchmesser von etwa 1 mm. Sie war etwa 0,8 mm dick und hatte etwa 200 Windungen aus lackiertem Kupferdraht von 0,05 mm Durchmesser. Die Spule war mit Schellack auf zwei Streifen dünnen Papiers befestigt, die ihrerseits auf einen Pappstreifen aufgeklebt waren und die Zuführungsdrähte gegen äußere Beschädigung schützten. Der Pappstreifen war an dem in Bild 13 dargestellten Galgen befestigt, so daß die Spule vertikal und horizontal bewegt werden konnte.

2. Das Meßprinzip und die Schaltungen.

In der festen Spule, deren Achse möglichst senkrecht zu den Polflächen eingestellt wurde, wurde durch das Feld im Luftspalt eine EMK:

$$E = -j\,\omega\,n\,\Phi\,\frac{10^{-8}}{\sqrt{2}} = c\,\mathfrak{H} \tag{53}$$

induziert, wo $n\,\Phi$ den maximalen Spulenfluß und $\mathfrak{H}$ die Feldstärke im Luftspalt bezeichnet. Die EMK wurde durch Kompensation bestimmt. Zu dem Zweck wurde der Netzspannung eine nach Phase und Amplitude bekannte Komponente entgegengeschaltet, welche die erzeugte EMK aufhob.

Die Schaltung für 500 Hz ist in Bild 16 dargestellt. Der in der Meßspule fließende Wechselstrom wird durch einen Kupferoxydul-Gleichrichter gleichgerichtet und mit einem Spiegelgalvanometer gemessen. Der Wechselstrom ist Null, wenn die am Widerstand R_2 abgegriffene Spannung die in der Meßspule induzierte EMK E in jedem Augenblick aufhebt. Das Galvanometer zeigt dann keinen Ausschlag. Handelt es sich um rein sinusförmige Spannungen, so ist in diesem Fall die Spannung am Widerstand R_2 in Gegenphase zu E und

$$i\,r = E,$$

wenn i der Strom im Widerstand R_2 und r der an ihm abgegriffene Widerstand ist. Die Phase von i kann durch Veränderung der Stöpselwiderstände R_2 und R_1 und des Meßkondensators C um nahezu 180^0 gedreht werden, ohne daß i seine Größe ändert. Die Amplitude von E ist direkt proportional dem Widerstand r, die Phase von E ist dieselbe wie die von i und kann daher aus den Schaltungselementen leicht ermittelt werden. Enthalten E und i Oberwellen ungleicher Stärke und ungleicher Phase, so kann man nur auf den kleinsten Galvanometerausschlag einstellen. Phase und Amplitude können dann nur näherungsweise bestimmt werden.

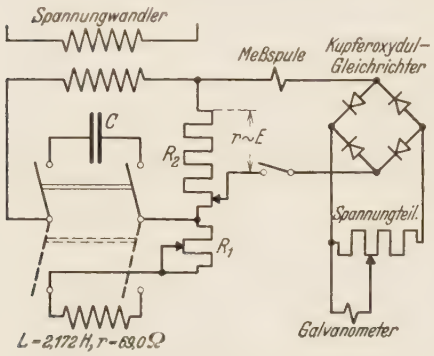


Bild 16. Schaltbild für die Messungen mit der festen Spule bei 500 Hz.

Da sich Oberwellen nicht ganz vermeiden lassen, haftet dieser Meßmethode also ein prinzipieller Mangel an, der den Wert ihrer Ergebnisse herabdrückt. Sie wurde deshalb hauptsächlich bei Luftspalten unter 3 mm benutzt, wo das Drehspulprinzip nicht mehr verwendbar war.

Die Schaltung für 50 Hz unterschied sich von der in Bild 16 dargestellten nur dadurch, daß die Phasenverschiebung durch einen Drehtransformator bewirkt wurde, an dem der Phasenwinkel direkt abgelesen werden konnte.

Die Konstante c in Gleichung (53) wurde stets durch Eichung im bekannten Felde einer Luftspule bestimmt.

Von den Fehlermöglichkeiten ist die durch nichtsinoidale Felder und Spannungen bereits oben geschildert.

Alle übrigen Fehler lagen infolge der Unempfindlichkeit der Meßmethode unterhalb der Beobachtungsgenauigkeit und wurden nicht berücksichtigt.

Die Unempfindlichkeit der Meßanordnung rührt vor allem daher, daß der Kupferoxydulgleichrichter mit abnehmender Spannung immer schlechter gleichrichtet (Lit. 21, Bd. 2, S. 13), so daß auch die Verwendung eines empfindlicheren Galvanometers die Genauigkeit nicht wesentlich zu vermehren gestattet.

II. Die Meßergebnisse.

a) Die Prüfung des Materials.

Das Joch und die Pole des benutzten magnetischen Kreises hatten einen quadratischen Querschnitt von $5 \cdot 5$ qcm und waren aus rechteckigen Quadern von $5 \cdot 2{,}5$ qcm Querschnitt zusammengesetzt (s. Bild 3 der theoretischen Untersuchung). Bei vielen Messungen wurde das massive Joch durch ein solches aus Dynamoblech ersetzt. Alle massiven Teile waren sauber geschliffen und die Polflächen standen genau parallel zueinander. Zur Prüfung runder Querschnitte konnten auf

die Pole Scheiben von 8 cm Durchmesser und 1,5 cm Dicke aufgesetzt werden, die ebenfalls allseitig geschliffen waren. Infolge der geringen Eindringtiefe im Eisen bildete sich das Feld im Luftspalt zwischen diesen Polschuhen nicht wesentlich anders aus, als wenn die Pole durchgängig den Querschnitt der Polschuhe hätten.

Die Magnetisierungskurven (Bild 17) und Hysteresisschleifen der Polschuhe und Pole wurden experimentell aufgenommen.

Aus den Hysteresisschleifen ergab sich:

	Polschuhe	Pole
Verluste V' bei 50 Hz und 10000 Γ	3,30	2,65 W/kg
Verlustwinkel α =	0,271 (15°,5)	0,303 (19°,9)

α ist der in der theoretischen Abhandlung bei der Behandlung des Einflusses der Hysteresis eingeführte Winkel zwischen der Feldstärke und Induktion und ist berechnet aus

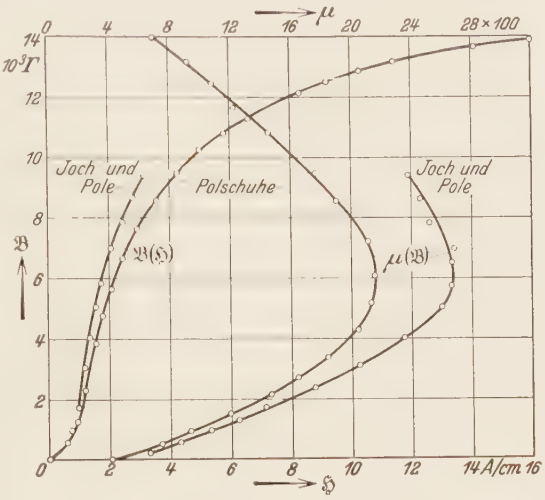


Bild 17. Magnetisierungskurven der verwendeten Eisensorten.

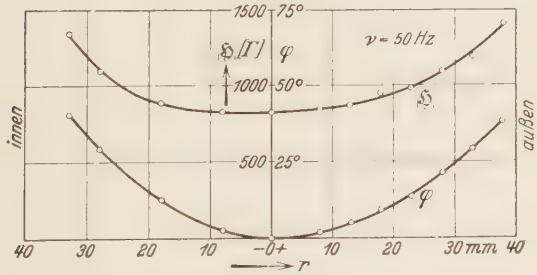
$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{Verlustarbeit}}{\text{Magnetisierungsarbeit}} = \frac{V}{\frac{AW}{\text{cm}}\,\mathfrak{B}}\,\frac{10^8}{4{,}44},$$

wenn V die Verluste pro Zyklus bei einer maximalen Induktion von 10000 Γ sind.

b) Die Messungen am runden Polschuh (Bild 18 ... 30).

Von der Feldstärke ist jeweils der Effektivwert aufgetragen, die Phase im Mittelpunkt stets gleich Null gesetzt.

Am Rande eines jeden Diagramms ist verdeutlicht, nach welcher Richtung vom Mittelpunkt des Luftspalts aus gemessen wurde. „Außen" und „innen" liegen in



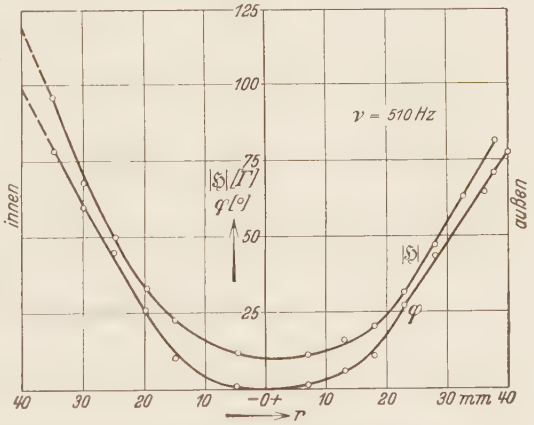


Bild 18 und 19. Amplitude $|\mathfrak{G}|$ und Phasenverschiebung φ der Feldstärke im Luftspalt runder Polschuhe von 80 mm Durchmesser bei 50 bzw. 510 Hz und einem Luftspalt von $2\,\delta = 1{,}05$ mm. Geblättertes Joch, Erregung: 220 Volt, 784 Windungen, bzw. 129 Volt, 600 Windungen. Messung mit fester Spule.

der Ebene des magnetischen Kreises am weitesten und nächsten zu dessen Mitte, „oben" und „unten" senkrecht zu dieser Ebene (vgl. Bild 3 der theoretischen Arbeit). „Innen" haben also die Induktionslinien bis zur Erreichung des Luftspalts den kürzesten Weg zurückzulegen, „außen" den weitesten, „oben" und „unten" einen mittleren Weg. Von außen dringt daher ein Fluß von geringerer Größe und anderer

Phase in den Luftspalt ein als von innen und der magnetische Mittelpunkt ist nach dem äußeren Rande verschoben (Bild 18 und 19).

Bild 20 . . . 23. Da das Joch massiv war, war die Streuung sehr groß (75. . . 80 %). Die Feldstärke im Luftspalt konnte daher nicht über maximal 92 Γ getrieben werden. In Bild 20 und 21 sind für $2\,\delta = 3{,}2$ mm einige berechnete Punkte eingetragen. Diese

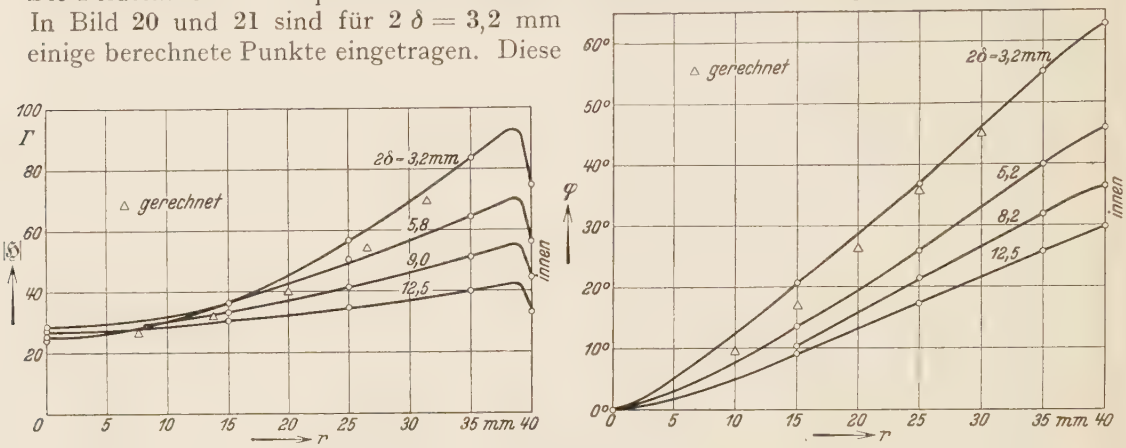


Bild 20 und 21. Runde Polschuhe, 510 Hz, Joch massiv, Erregung 228 Volt, 600 Windungen. Für $2\,\delta = 3{,}2$ mm sind berechnete Punkte eingetragen. $|\mathfrak{S}|$ und $\varphi = f(r)$ bei verschiedener Größe des Luftspalts. Messung mit Drehspule.

sind so bestimmt, daß bei $r = 35$ mm der Phasenwinkel mit dem gemessenen übereinstimmt. Der Hysteresiswinkel ist zu 8^0 angenommen, die Verschiebung des magnetischen Mittelpunktes nach dem äußeren Rande auf Grund der Bilder 18 und 19 zu 2 mm geschätzt. Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung ist befriedigend, nicht nur bei der Phase, sondern auch bei der Amplitude. Am Rande sinkt infolge der Streuung die Amplitude stark ab.

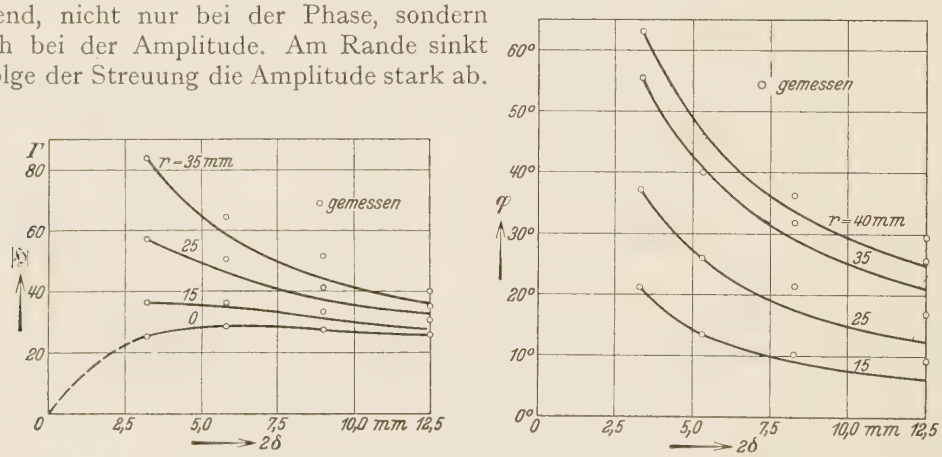


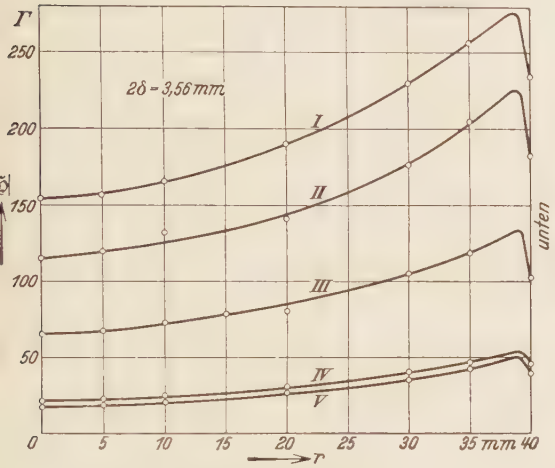
Bild 22 und 23. Berechnete Kurven, die die Abhängigkeit von φ und $|\mathfrak{S}|$ von der Größe des Luftspalts zeigen. Zum Vergleich sind die Meßwerte der Bilder 20 und 21 eingetragen.

Berechnung der mittleren Permeabilität. Man findet für $r = 3{,}5$ cm und $\varphi = 55^0$ aus der theoretischen Kurve (Bild 6 der theoretischen Arbeit), unter Berücksichtigung des auf S. 251 berechneten Verlustwinkels $\alpha = 16{,}9^0$ und der Näherungsgleichung (35a), S. 242 der theoretischen Arbeit für die Bestimmung der Phasenkorrektur: $r/K = 2{,}72$ und $K = 1{,}28$ cm, womit sich aus Gleichung (17) berechnet:

$$\mu \approx 400.$$

Dieser Wert entspricht ungefähr der Anfangspermeabilität des untersuchten Eisens. Da das Eisen fast im ganzen Polschuh sehr schwach induziert war, ist dieser Wert nicht unwahrscheinlich.

Abhängigkeit von der Größe des Luftspalts. In Bild 22 und 23 ist für konstante Permeabilität der theoretische Verlauf von Amplitude und Phase in Abhängigkeit von der Weite des Luftspalts $2\,\delta$ gezeichnet. Die Rechnung geht von den Werten aus, die für $r = 0$ und $2\,\delta = 3{,}2$ mm gemessen sind. Die berechneten Punkte liegen durchweg über den gerechneten, eine Erscheinung, die sich durch das Ansteigen der Permeabilität mit der Induktion erklären läßt.



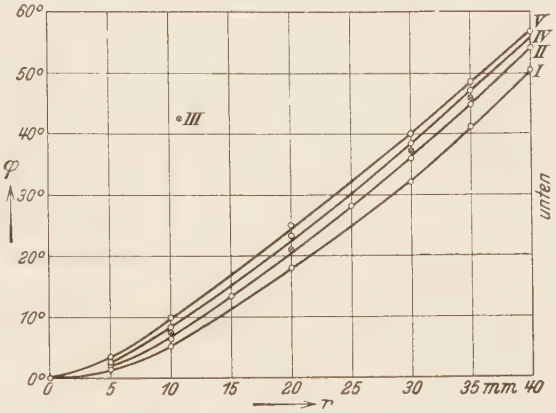


Bild 24 und 25. $|\mathfrak{H}(r)|$ und $\varphi(r)$ bei verschiedenen Erregungen. $2\,\delta = 3{,}56$ mm. 510 Hz. Runde Polschuhe, geblättertes Joch. Messung mit Drehspule. Kurven für gleiche Erregung haben gleiche Nummern.

Erregungen: $I = 228$ V, 300 Windungen, $II = 228$ V, 400 Windungen,
$III = 228$ V, 600 Windungen, $IV = 47$ V, 300 Windungen,
$V = 47$ V, 400 Windungen.

Bild 24...26. Da in senkrechter Richtung gemessen wurde, ist keine wesentliche Asymmetrie vorhanden. Die mit gleichen römischen Zahlen bezeichneten Kurven sind bei gleicher Erregung des magnetischen Kreises aufgenommen.

Einfluß der Induktionshöhe im Eisen. Die Änderung der Amplitude und der Phase wird mit abnehmender Induktion immer größer. Die maximale Induktion im Eisen betrug bei den Kurven I schätzungsweise 16000 Γ, bei Kurve V etwa 5000 Γ. Die mittlere Permeabilität des Eisens wird also mit abnehmender Induktion ebenfalls gefallen sein. Demnach bestätigen die Kurven die Behauptung der Theorie, daß die Eindringtiefe K im Luftspalt mit wachsender Permeabilität zunimmt.

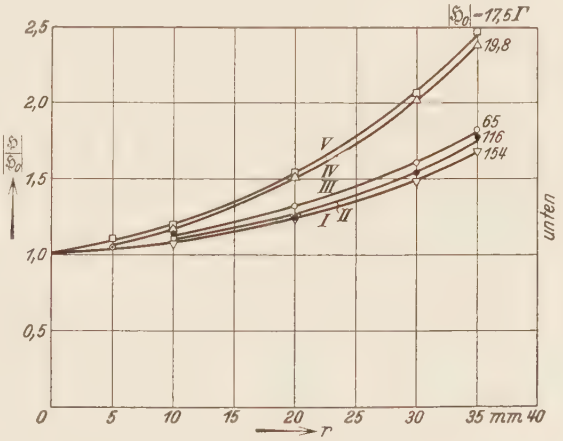


Bild 26. Amplitude der Feldstärke $|\mathfrak{H}|$ nach Bild 24, bezogen auf die Amplitude in Luftspaltmitte.

Im Verlauf der einzelnen Kurven macht sich der Einfluß der kleinen Sättigung in den inneren Teilen der Polflächen bemerkbar: Sämtliche Kurven sind weniger gekrümmt als es die Theorie erfordert, obwohl doch zum Teil schon im Sättigungsgebiet gearbeitet wurde. Besonders trifft dies für die Phasenverschiebung zu. (Vgl. hierzu die theoretische Arbeit, S. 245.)

Einfluß der Hysteresis. Sucht man sich zu einer der gemessenen Phasenverschiebungen aus der theoretischen Kurve (Bild 6 der theoretischen Arbeit) den Wert r/K heraus, so erhält man einen wesentlich größeren Wert, als wenn man ihn mit der zugehörigen relativen Feldstärke bestimmt. Zur Beseitigung dieser Unstimmigkeit wäre bei den Kurven V (Bild 24 und 25) ein Hysteresiswinkel von 16^0, bei den Kurven I ein solcher von 32^0 in die Rechnung einzusetzen. Ersterer Wert

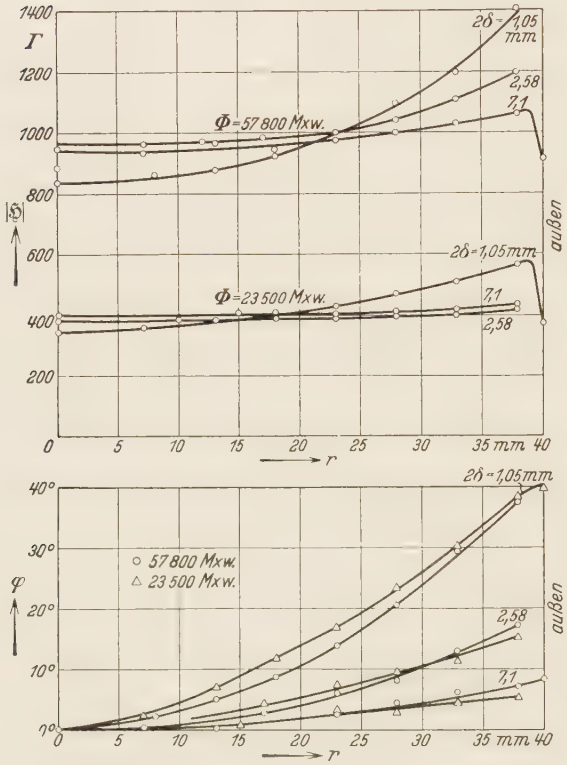


Bild 27 und 28. Amplitude und Phase von $\mathfrak{H} = f(r)$ bei verschiedener Größe des Luftspalts und starker und schwacher Erregung. Φ, der Gesamtfluß im Luftspalt, wurde bei Änderung des Luftspalts angenähert konstant gehalten. 50 Hz. Runde Polschuhe. Geblättertes Joch.

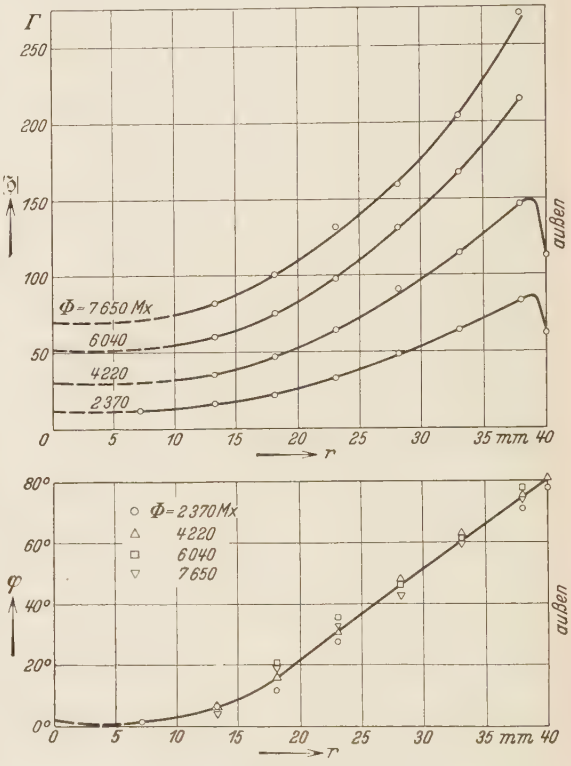


Bild 29 und 30. $\varphi(r)$ und $|\mathfrak{H}(r)|$ bei verschiedener Erregung. 510 Hz. Runde Polschuhe. Geblättertes Joch. $2\,\delta = 1{,}05$ mm.

wurde bereits aus den magnetischen Daten des Eisens für $\mathfrak{B} \approx 10000\ \Gamma$ berechnet. Letzterer Wert ist unwahrscheinlich groß. Vermutlich sind es andere Einflüsse, die das Feld so stark verzerren.

Bild 27 . . . 30. Bei allen Kurven ist der Gesamtfluß, der durch den Luftspalt ging, eingetragen. Er wurde mit einer Prüfspule, die über den Luftspalt geschoben war, in derselben Weise wie das Feld im Luftspalt nach Schaltbild 16 gemessen.

Einfluß niedriger und hoher Eiseninduktion (Bild 28). In der Nähe des Nullpunktes ist die Phasenverschiebung bei dem kleinen Fluß größer als bei dem großen. In der Nähe des Randes ist es umgekehrt. Der Grund ist wieder darin zu suchen, daß im Innern die mittlere Permeabilität des Eisens bei dem großen Fluß größer als bei dem kleinen Fluß ist. Am Rande, wo dem Fluß von 57800 Mx annähernd 20000 Γ im Eisen entsprechen dürften, ist es gerade umgekehrt. Beim Vergleich der Phasenverschiebungen erkennt man, besonders bei $2\,\delta = 1{,}05$ mm, daß die Kurve für gesättigtes Eisen im mittleren Teil stärker gekrümmt ist als die für schwach magnetisiertes Eisen. Das entspricht der theoretischen Erwartung.

Bei 510 Hz (Bild 30) hängt die Phasenverschiebung vom Fluß fast gar nicht ab. Die Abweichungen liegen bereits an der Grenze der Meßgenauigkeit.

Frequenzabhängigkeit. An den Kurven $\Phi = 7650$ Mx (Bild 29 und 30) und $\Phi = 23500$ Mx (Bild 27 und 28) soll geprüft werden, ob die Theorie die Frequenzabhängigkeit richtig wiedergibt. Es ist anzunehmen, daß in beiden Fällen annähernd dieselbe maximale Induktion im Eisen herrscht. Denn diese ist proportional dem Fluß und der Wurzel aus der Frequenz [s. Gleichung (1b) der theoretischen Arbeit] und es ist

$$7650 \sqrt{\frac{510}{50}} = 24400 \text{ Mx}.$$

In der folgenden Tabelle ist das Verhältnis der Eindringtiefen bei 510 und 50 Hz auf drei Wegen berechnet: 1. Aus dem Verhältnis der gemessenen Frequenzen [nach Gleichung (17) und (1b) der theoretischen Arbeit], 2. und 3. aus der zwischen $r = 0$ und $r = 3{,}5$ cm gemessenen Änderung der Amplitude und der Phase der Feldstärke (nach Diagramm Bild 6 der theoretischen Arbeit):

Frequenz Hz	$\frac{K_{\omega,50}}{K_{\omega,510}}$	$2\,\delta$ mm	Fluß Mx	φ °	$\frac{r}{K_\varphi}$	K_φ cm	$\frac{K_{\varphi,50}}{K_{\varphi,510}}$	$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_0}$	$\frac{r}{K_\mathfrak{H}}$	$K_\mathfrak{H}$ cm	$\frac{K_{\mathfrak{H},50}}{K_{\mathfrak{H},510}}$
510	1,787	1,05	7 650	65,0	3,54	0,99	1,70	3,32	2,80	1,25	1,785
50		1,05	23 500	32,0	2,08	1,68		1,522	1,57	2,23	

Die drei Berechnungen von $K_{50} : K_{510}$, die auf voneinander unabhängigen Messungen beruhen, stimmen innerhalb der Meßgenauigkeit überein. Das ist eine starke Stütze dafür, daß die entwickelte Theorie den praktischen Verhältnissen genügend genau entspricht.

c) Die Messungen am rechteckigen Pol.

Die Messungen (Bild 31 und 32) wurden mit Hilfe der Drehspule an den aus je zwei rechteckigen Quadern aufgebauten Polen selbst durchgeführt, also ohne Verwendung von Polschuhen. Es sind die Kurven gleicher Amplitude und gleicher Phase

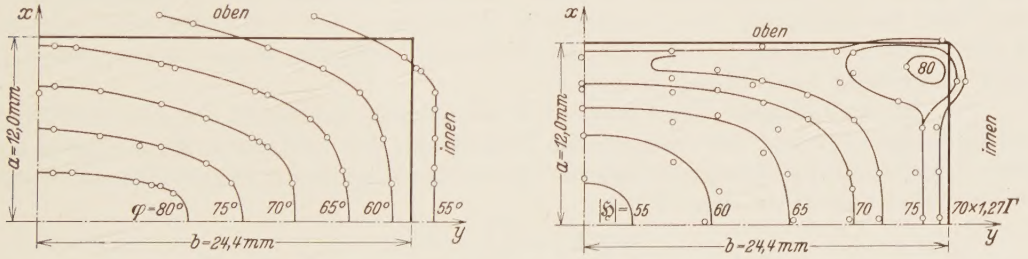


Bild 31 und 32. Linien gleicher Phasenverschiebung und Amplitude für den rechteckigen Querschnitt.

gezeichnet. Als Phasenverschiebung ist jeweils die Lage des Vektors der Feldstärke gegenüber einem Vektor eingetragen, der der Netzspannung um 90° nacheilt. Die eingetragenen Punkte sind durch graphische Interpolation aus 36 über den Querschnitt gleichmäßig verteilten Meßwerten gewonnen. Wie man aus einem Vergleich mit den Bildern 8 und 9 der theoretischen Arbeit erkennt, stimmt der Verlauf dieser Kurven im Innern des Luftspalts bis zu $\mathfrak{H} = 70 \cdot 1{,}27\,\Gamma$ und $\varphi = 70^0$ gut mit der Rechnung überein, der ungefähr dieselben Daten zugrunde liegen. Über diese Linien hinaus macht sich aber immer mehr der Einfluß des Randes und der Ecke bemerkbar. Der Anstieg der Feldstärke in der Ecke ist durch die Theorie nicht zu erklären.

Zusammenfassung und Ergebnisse.

Es wird untersucht, welchen Einfluß ein Luftspalt in einem mit Wechselstrom magnetisierten Eisenring auf den Feldverlauf im Eisen hat und wie das Feld im Luftspalt selbst aufgebaut ist. Theoretisch wird der Feldverlauf im Luftspalt von massiven Polen für folgende Fälle untersucht:

Polquerschnitt rechteckig;

Polquerschnitt rund;

Permeabilität des Eisens konstant;

Permeabilität des Eisens komplex (zur Berücksichtigung der Hysteresis);

Induktion im Eisen dem Betrage nach konstant (zur Abschätzung des Einflusses der Sättigung — ideale Sättigung —).

Für die ideale Sättigung wird eine neuartige strenge Formel für den Feldverlauf in starkem massivem Eisen aufgestellt, die Abweichungen gegenüber der Lösung von Rosenberg zeigt[1].

Die experimentelle Untersuchung erstreckt sich auf folgende Fälle:

Luftspaltweite: variabel zwischen 0,1 und 3 cm;

Permeabilität variabel zwischen etwa 400 und 2700;

Frequenz: 50 und 500 Hz;

Form der Pole: rechteckig und rund.

Die Ergebnisse der Theorie werden im wesentlichen bestätigt. Es ergibt sich für technische Frequenzen bis 500 Hz:

1. In massivem Eisen von 1 cm und mehr Stärke ist ein Feld praktisch nur in einer dünnen Oberflächenschicht vorhanden. Der Fluß in dieser Schicht ergibt sich durch Multiplikation der Randinduktion und des Eisenumfangs mit der „Eindringtiefe" $k = \sqrt{\varrho/4\pi\omega\mu}$.

2. Ist der Luftspalt in der Größenordnung von $^1/_{1000}$ mm oder kleiner, so setzt sich der Kraftfluß im Eisen nahezu unverzerrt über den Luftspalt fort. Der gesamte magnetische Widerstand des Luftspalts ist in diesem Falle μ mal größer als der eines gleich langen Stückes des Eisenkerns.

3. Je weiter der Luftspalt ist, um so mehr verbreitet sich der Kraftfluß über das Innere der Polflächen, um so deutlicher prägt sich auch auf den Polflächen die unter Punkt 1 genannte dünne Oberflächenschicht aus und um so homogener wird das Feld im Luftspalt. Der magnetische Widerstand des Luftspalts wird, auf die Längeneinheit bezogen, mit wachsender Weite des Luftspalts immer kleiner, während sich gleichzeitig seine Phase ändert.

4. Ist der Luftspalt $\geqq$ 0,1 mm, so ist die Oberflächenschicht auf den Polflächen völlig ausgeprägt und der magnetische Widerstand des Luftspalts W_2, bezogen auf den Widerstand W_1 eines gleich langen Stückes des Eisenkerns, nähert sich mit wachsender Dicke der Pole dem Werte

$$W_2/W_1 = \frac{2K}{2\delta} e^{-i\frac{\pi}{8}},$$

wenn 2δ die Weite des Luftspalts und $K = \sqrt{\mu\,\delta\,k}$ ist. K wird als Eindringtiefe des Luftspalts bezeichnet und hat für diesen dieselbe Bedeutung wie k für das Eisen, siehe Punkt 1. Der Luftspalt bietet bei dicken Polen dem Betrage nach denselben magnetischen Widerstand wie ein Eisenweg von der Länge $2K$.

5. Die Sättigung des Eisens erniedrigt den relativen Widerstand des Luftspalts W_2/W_1 um einige Prozent, ohne seine Phasenverschiebung merkbar zu beeinflussen. Die Verkleinerung des Betrages beträgt bei idealer Sättigung und sehr starken Polen 7,1%.

6. Die Hysteresis des Eisens ändert den relativen magnetischen Widerstand des Luftspalts im Betrage nicht, sondern vergrößert nur seinen Phasenwinkel. Ersetzt

[1] Rosenberg, Elektrotechn. Z., 1923, S. 513.

man die Hysteresisschleife durch eine Ellipse, so ergibt sich eine Vergrößerung der Phase um $\alpha/4$, wenn α den Hysteresisverlustwinkel des sehr starken Eisens bezeichnet.

7. Abgesehen von der Polform bestimmt die Eindringtiefe K in allen genannten Fällen den Feldverlauf im Luftspalt. Das Experiment zeigt, daß die für konstante Permeabilität unter Vernachlässigung der Randwirkung aufgestellten Formeln den Feldverlauf befriedigend wiedergeben. Eine bessere Übereinstimmung wird durch Einführung einer komplexen Permeabilität zur Berücksichtigung der Hysteresis erzielt.

8. Eine mit der Induktion abnehmende Permeabilität des Eisens (Sättigung) bewirkt eine stärkere Krümmung, eine zunehmende Permeabilität eine Streckung der Kurven, welche den Verlauf der Amplitude und Phase der Feldstärke im Luftspalt beschreiben.

9. Ändert sich im Luftspalt die Feldstärke dem Betrage nach, so gehört hierzu praktisch dieselbe Phasenverschiebung, gleichgültig, ob es sich um gesättigtes oder ungesättigtes Eisen handelt. Am Luftspaltrande sind aber unter sonst gleichen Bedingungen bei gesättigtem Eisen die Änderungen pro Zentimeter stärker, im Innern geringer als bei ungesättigtem Eisen.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung von Herrn Professor Dr.-Ing. Hilpert im Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Breslau durchgeführt. Es ist mir eine angenehme Pflicht, auch an dieser Stelle Herrn Professor Dr.-Ing. Hilpert und Herrn Privatdozent Dr.-Ing. Büge für Überlassung der Mittel des Instituts und fördernde Ratschläge meinen besten Dank auszusprechen.

Lebenslauf.

Ich, Fritz Haberland, bin geboren am 16. Juni 1902 zu Dortmund als Sohn des Studienrats Professor Dipl.-Ing. Haberland. Ich besuchte das Realgymnasium „Zum heiligen Geist" in Breslau und bestand dort Ostern 1922 die Reifeprüfung. Vom April 1922 bis zum April 1923 arbeitete ich als Praktikant bei den Linke-Hofmann-Lauchhammer-Werken in Breslau. Im Anschluß hieran studierte ich an den Technischen Hochschulen zu Breslau und München Maschinenwirtschaft, Fachrichtung Elektrotechnik, und bestand im Juli 1927 in Breslau die Diplom-Hauptprüfung. Vom November 1927 bis zum August 1930 war ich bei den Siemens-Schuckert-Werken in Berlin-Siemensstadt als Projektierungsingenieur tätig. Vom Februar 1931 bis zum Januar 1933 führte ich am Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Breslau neben anderen Arbeiten vorliegende Untersuchung durch. Im März 1932 erschien mein Aufsatz: „Der Durchhang von Freileitungen usw." in der E.T.Z.

Breslau, im Januar 1933.